

Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik

Z A M P

Journal of Applied Mathematics and Physics

Journal de Mathématiques et de Physique appliquées

Editores: J. Ackeret E. Baumann P. Niggli P. Scherrer E. Stiefel F. Stüssi H. Ziegler

Redactor: R. Sängner

INHALT - CONTENTS - SOMMAIRE

MELCHER, D.: Experimentelle Untersuchung von Vereisungserscheinungen	421
GLASER, W. und ROBL, H.: Strenge Berechnung typischer elektrostatischer Elektronenlinsen	444
SPILLMANN, W.: Der Wärmeaustausch durch Strahlung an fliegenden Körpern	470

Kurze Mitteilungen - Brief Reports - Communications brèves

LAIBLE, TH.: Höhenkarte des Fehlerintegrals	484
ROTH-DESMEULES, E.: Zur Berechnung der Flugbahnscharen ferngesteuerter Raketen	487
VLAVAVAS, G. N.: A Graphical Solution for the Star-Connected Three-Phase Circuit	489

Varia - Miscellaneous - Divers

IX. Generalversammlung der Internationalen Union für Geodäsie und Geophysik (F. GASSMANN)	491
Errata	492
Buchbesprechungen - Book Reviews - Notices bibliographiques	493

ZAMP

Vol. II

Fasc. 6

Pag. 421-498

15. 11. 51

Verlag Birkhäuser Basel / Schweiz

A1
37

Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik

Journal of Applied Mathematics and Physics

Journal de Mathématiques et de Physique appliquées

ZAMP

Redactor: Prof. Dr. R. Sängler, Postfach Zürich 23 (Schweiz)

ZAMP erscheint regelmäßig alle zwei Monate. *Redaktionsschluss*: spätestens 8 Wochen vor Erscheinungstermin. Manuskripte und alle die Redaktion betreffenden Zuschriften sind an den Redaktor zu richten. Manuskripte für *Kurze Mitteilungen* können, falls die Autoren auf Zustellung eines Korrekturabzuges verzichten, 6 Wochen vor Erscheinungstermin eingereicht werden. Die Beiträge werden in deutscher, englischer, französischer oder italienischer Sprache publiziert, doch soll jeder *Originalarbeit* und *Kurzen Mitteilung* eine kurze Zusammenfassung in einer andern als der Originalsprache beigegeben werden. *Abbildungsvorlagen* sollen reproduktionsfertig mit Reduktionsmaßstab versehen eingeliefert werden, hingegen soll die Beschriftung nur mit Bleistift, am besten auf einem lose vorgeklebten, durchsichtigen Papier, ausgeführt werden. Die Verfasser von *Zusammenfassenden Berichten*, *Originalarbeiten* und *Kurzen Mitteilungen* erhalten 50 Gratisseparata ohne Umschlag.

ZAMP is published regularly every two months. All papers must be in the hands of the editor at least 8 weeks before publication of the issue. Manuscripts and all other correspondence concerning contributions to the periodical must be addressed to the editor. Manuscripts of *Brief Reports* can be submitted 6 weeks before publication of the issue, if the authors forego proof-reading. The contributions will be published in German, English, French, or Italian; to each *Original Paper* and *Brief Report* must be added a brief summary in another than the original language. Drawings and photographs for *illustrations* must be sent ready for reproduction with indication of the proposed reduction; writings on the illustrations must be done with pencil, preferably on a loosely attached transparent sheet. The authors of *Survey Articles*, *Original Papers*, and *Brief Reports* receive 50 free copies of separata prints without cover.

ZAMP paraît régulièrement tous les deux mois. Derniers délais pour présenter les manuscrits: deux mois avant la parution de chaque numéro. Tous les manuscrits et toute correspondance relatifs à la rédaction sont à adresser au rédacteur. Les manuscrits pour des *communications brèves* peuvent être présentés six semaines avant la parution, si les auteurs renoncent à contrôler les épreuves. Les articles seront publiés en langues française, anglaise, allemande ou italienne; cependant chaque *article original* et toute *communication brève* devront être accompagnés d'un résumé en une autre langue. Les *illustrations* doivent être prêtes à la reproduction et il faudra y indiquer l'échelle de réduction. La légende devra être inscrite au crayon, de préférence sur papier transparent, légèrement collé à l'illustration. Les auteurs de *comptes rendus*, ainsi que ceux d'*articles originaux* et de *communications brèves* recevront 50 tirés à part sans couverture de leur article.

Jahresabonnement (6 Nummern): Inland Fr. 34.-, Ausland Fr. 40.-, Einzelnummer Fr. 8.-

Annual subscription (6 issues): Switzerland Fr. 34.-, foreign Fr. 40.-, single copy Fr. 8.-

Abonnement annuel (6 numéros): Suisse Fr. 34.-, étranger Fr. 40.-, le numéro Fr. 8.-

ZAMP kann in folgenden Ländern bei der Post abonniert werden:

ZAMP can be subscribed directly through any Post Office in the following countries:

ZAMP peut être abonné directement aux offices postales dans les pays suivants:

Belgien, Luxemburg	Dänemark	Schweden	Portugal	Italien
Holland	Norwegen	Finnland	Marokko	Deutschland

Inserate/Advertisements/Annonces: $\frac{1}{4}$ Seite/page: Fr. 165.-, $\frac{1}{8}$ Seite/page: Fr. 88.-, $\frac{1}{16}$ Seite/page: Fr. 50.-

Alle Rechte, einschließlich der Übersetzung und Reproduktion auf photostatischem Wege oder durch Mikrofilm, vorbehalten. - All rights, incl. translations and photostatic and microfilm reproduction, reserved. - Tous droits, y compris traductions et reproductions photostatiques et par microfilm, réservés.

Copyright 1951 by Verlag Birkhäuser AG., Basel 10, Switzerland

Printed in Switzerland

Experimentelle Untersuchung von Vereisungserscheinungen

Von DOMENIC MELCHER, Weißfluhjoch, Davos¹⁾

Problemstellung

Die Vereisungserscheinungen verursachen an Flugzeugen und Freileitungen erhebliche Schäden. Ihre Bekämpfung gestaltet sich sehr schwierig, weil wir über das Auftreten und den Mechanismus dieses Phänomens nur lückenhafte Kenntnisse haben. Die vorliegende Arbeit hat zum Ziele, diese zu erweitern, um dadurch den Weg für eine wirksame Abwehr zu finden. Es sollen untersucht werden:

1. Die meteorologischen Grenzbedingungen, innert welchen Vereisungen vorkommen.
2. Der Mechanismus der Vereisung.
3. Die Methoden, die zur Herstellung möglichst vielfältiger Vereisungstypen, vor allem solcher besonders schädlicher Art, dienen.

Dabei wollen wir uns ausdrücklich auf Erscheinungen beschränken, die *in praxi* schädigende Wirkung haben können. Rauhreferscheinungen, wie sie an kalten Wintertagen infolge örtlich und zeitlich streng begrenzter Unterkühlungen vorkommen, sollen nicht berücksichtigt werden.

Lösungsabsichten

Prinzipiell wird der Weg über das Laboratoriumsexperiment gewählt. Dies hauptsächlich mit Rücksicht auf Ziffer 3 der Fragestellung. Gewisse, den Mechanismus betreffende Fragen werden an einer Freiluftreifeanlage untersucht.

ERSTER TEIL

Laboratoriumsuntersuchungen

In einem klimatisierten Windkanal sollen unter den verschiedenartigsten meteorologischen Bedingungen Vereisungserscheinungen messend beobachtet werden. Zur Charakterisierung dieser ersteren sind zu messen: Windgeschwindigkeit, Temperatur, Gehalt an flüssigem Wasser (Nebeltröpfchen), Tropfengröße. Die entstehende Vereisung soll quantitativ erfaßt werden durch Messung von: Gewicht des Ansatzes, wahres Volumen des Ansatzes (exklusive Luftein-

¹⁾ Die Untersuchungen wurden im Auftrage der Schweizerischen Kommission für Vereisungsfragen in den Laboratorien des Eidgenössischen Instituts für Schnee- und Lawinenforschung, Weißfluhjoch, Davos, durchgeführt.

schlüsse), scheinbares Volumen (inklusive gesamtes Porenvolumen), kristallographische Eigenschaften, Temperatureffekte am Vereisungskörper.

1. Experimentelles

1.1 Der Windkanal

Der offene Windkanal, gemäß der maßstäblich gezeichneten Figur 1, besteht aus sechs leicht demontierbaren Teilen. Ein Ventilator, der durch einen

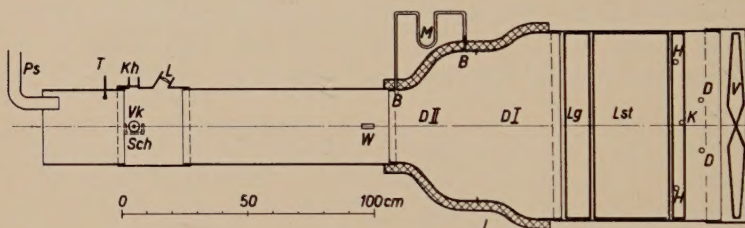


Fig. 1

Windkanal.

<i>V</i>	Ventilator	<i>M</i>	Manometer
<i>D</i>	Dampfeinspritzung	<i>J</i>	Watteisolation
<i>K</i>	Abschluß der Kühlschlange	<i>W</i>	Schlitz für Wasserzerstäuber
<i>H</i>	Heizwicklungsträger	<i>Vk</i>	Versuchskörper
<i>Lst</i>	Leitstern	<i>Sch</i>	Schiene an der Außenwand
<i>Lg</i>	Leitgitter	<i>L</i>	Beleuchtungslinse
<i>DI, DII</i>	Venturi-Düsen	<i>Kh</i>	Kamerahalter
<i>B</i>	Bohrung 2 mm	<i>Ps</i>	Luftentnahme für Psychrometer
<i>T</i>	Thermometer		

Zweiphasen-Kurzschlußankermotor von 1,1 PS Leistung angetrieben wird, gestattet, die Luftfördermenge, bei einer kontinuierlichen Tourenzahländerung von 0 auf 930 t./min, bis maximal 4,3 m³/s zu steigern, was im Meßteil ca. 60 m/s Windgeschwindigkeit entspricht. Im Klimatisierungsteil ist neben einer Kühlschlange aus 8 m Kupferrohr von 6 mm Außendurchmesser eine Heizung von 1100 W Leistung eingebaut. Sie besteht aus zwei parallelen, über den ganzen Kanalquerschnitt verteilten Wicklungen, die so geschaltet sind, daß sie beim Abschalten des Antriebmotors automatisch außer Betrieb gesetzt werden. Die Temperaturerhöhung durch die Heizung beträgt 2,5°C bei 5 m/s Windgeschwindigkeit und – 10°C Laboratoriumstemperatur. Der achteilige Leitstern aus 0,6 mm dickem Zinkblech und das Leitgitter von 30 mm Maschenweite sind auf getrennten Zylindern montiert und in den Kanal eingeschoben. Düse II hat zwei Bohrungen von 2 mm Durchmesser zur Druckentnahme für die Geschwindigkeitsmessung. Auf dem Meßteil ist eine Linse von 12 cm Brennweite und 8 cm Durchmesser sowie ein Kamerahalter montiert. Darin kann

ein Leicaobjektiv mit Verlängerungstubus eingesetzt werden (Aufnahmen im Maßstab 1:3). Der Versuchsstab (Figur 2) von 1 cm Durchmesser wird senkrecht zur Windrichtung in den Kanal eingesetzt («Kreuzstrom») und kann nach Beendigung des Versuches mittels einer außen angebrachten Führungsschiene herausgezogen werden. Die Strömung im Kanal zeigt bei visueller Beobachtung des beigemischten Nebels keine makroskopische Turbulenz. Dies scheinen auch die in Ziffer 2.7 beschriebenen Reifformen zu bestätigen.

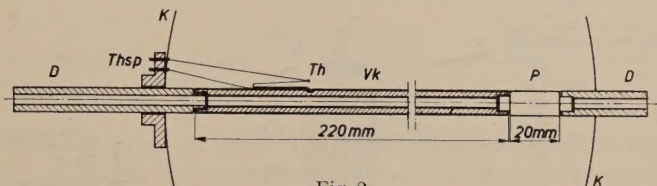


Fig. 2

Versuchskörper.

<i>K</i>	Kanalwand	<i>P</i>	Paraffinkörper
<i>Vk</i>	Versuchskörper	<i>Th</i>	Thermoelement
<i>D</i>	Dellitrohr	<i>Thsp</i>	Abnahme der Thermospannung

1.2 Die Klimatisierung

Die Klimatisierung des Kanals besteht darin, in ihm eine bestimmte Temperatur und einen bestimmten Wassergehalt zu erzeugen und während des Anreifversuches aufrechtzuerhalten.

Zur Temperaturregulierung wurde die Kältemaschine des Laboratoriums benützt. Diese gestattet, jede beliebige Solltemperatur zwischen 0 und -20°C einzustellen. Während der Versuchsdauer, die zwischen 1 h und 6 h liegt, kommt es vor, daß die Laboratoriumstemperatur infolge Erwärmung durch die Dampferzeugungsanlage um maximal 2°C ansteigt. Aus diesem Grunde wird bei Versuchsbeginn von einer um 2°C niedrigeren Temperatur ausgegangen und die Kanalluft entsprechend aufgeheizt. Die Heizenergie muß dann sukzessive vermindert werden. Die Konstanz der Kanalttemperatur beträgt bei diesem Vorgehen $\pm 0,3^{\circ}\text{C}$. Es muß noch bemerkt werden, daß die Leistung der Kältemaschine und ihr Verhältnis zum Laboratoriumsvolumen der Klimatisierung eine Grenze setzen, die nicht überschritten werden kann, ohne das Wärme-gleichgewicht zu stören.

Wie Vorversuche und Naturbeobachtungen gezeigt haben, treten Vereisungs-erscheinungen nur bei Anwesenheit von flüssigem Wasser (Nebel, Regen) auf. Die künstliche Erzeugung dieser Wassertröpfchen kann entweder über die Dampfphase, durch Kondensation in der kalten Kanalluft, oder durch mechanische Zerstäubung von Wasser erfolgen. Zur Bearbeitung der Punkte 1 und 2 der Problemstellung wurde der erste Weg gewählt. Er hat den Vorteil, eine feine und reproduzierbare Dosierung der H_2O -Menge zu gestatten. Die erzeugten

Tropfchen sind von einheitlicher Größe und, bei festgehaltener Windgeschwindigkeit (Lebensdauer), unabhängig von der Temperatur und der Tropfenzahl. Der Nachteil der Methode besteht darin, daß die Tropfen noch in ihrem Entstehungsstadium sind, einen kleinen Durchmesser haben (ca. $5\ \mu$) und somit nur lockere Reifbildung erzeugen. Der Dampf wurde in einem Kessel gemäß Figur 3 hergestellt. Der Dampfdruck beträgt 30 at. Eine Heizplatte von

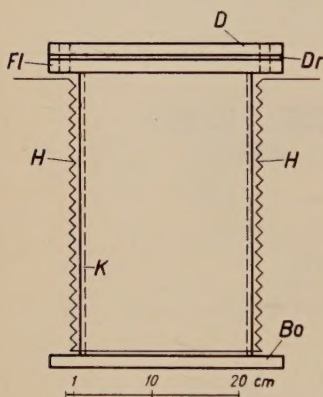


Fig. 3

Dampfkessel

- K* Kessel, 5 mm Wandstärke
Bo Bodenplatte, 12 mm
Fl Flansch
Dr Dichtungsring, Klingerit
D Deckel mit Gewindelöchern für 12-mm-Schrauben und Ventile
H Heizwicklungen

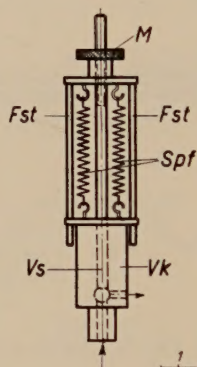


Fig. 4

Sicherheitsventil

- Vk* Ventilkörper
Vs Ventilstange mit Kugel
Spf Spannfedern
Fst Führungsstangen
M Spannmutter

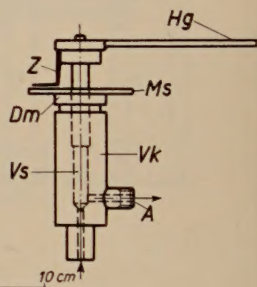


Fig. 5

Dampf-Dosierventil

- Vk* Ventilkörper
Vs Ventilstange mit Kegel
Dm Dichtungsmutter mit Stopfbüchse
Ms Markierungsscheibe
Hg Handgriff
A Anschlußstutzen für Dampfleitung
Z Zeiger

1200 W und drei seitlich angeordnete Heizspiralen von total 2340 W Leistungsaufnahme halten diesen Druck auch bei den größten H_2O -Gehalten ($1,5\ \text{g/m}^3$ bei 5 m/s) aufrecht. Ein Asbestmantel mit Luftschicht und aufgelegte Kissen aus Glaswolle verhindern soweit als möglich eine Wärmeabgabe an das Laboratorium. Die Konstruktion des Sicherheits- und des Dampf-dosierungsvertils sind aus den Figuren 4 und 5 ersichtlich. Der Dampf wird mittels zweier Messingröhrchen von 2 mm Durchmesser bei *D* (Figur 1) in den Kanal eingespritzt. Die Temperaturerhöhung infolge des Dampfzuschusses beträgt maximal 2°C . Die effektive Unterkühlung der Tropfchen ist zwar nicht bekannt, doch ist aus der Art des entstehenden Reifes am Versuchskörper zu schließen, daß sie augenblicklich nach ihrem Aufprall gefrieren. Bei tiefen Temperaturen (-17°C) macht sich am Kanalende ein spontanes Ausschneien bemerkbar.

Die Herstellung von schweren Vereisungen geschieht durch eine H_2O -Zerstäubungsanlage, welche nach dem Prinzip der im Handel erhältlichen Spritzpistolen arbeitet (siehe Figur 6). Die H_2O -Temperatur im Vorratsgefäß beträgt

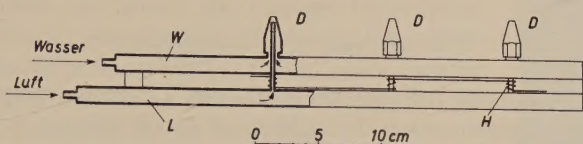


Fig. 6

H_2O -Zerstäubung.

- | | |
|---|-----------------------|
| <i>L</i> Rohr für Druckluft, 11×11 mm, mit 3 eingelöteten Röhrchen | <i>D</i> Düsen |
| <i>W</i> Rohr für Wasser, 11×11 mm, mit 3 eingelöteten Gewindestutzen | <i>H</i> Heizwicklung |

5°C. Das Düsensystem ist zwecks Verhinderung von Eisbildungen mit einer Heizwicklung (50 W) versehen. Der so erhaltene Reif ist kompakt, undurchsichtig und hat körnige Struktur. Die Tropfengröße ist abhängig von der zerstäubten H_2O -Menge (Öffnung des Düsenschlitzes). Durch Erhöhung des Luftdruckes kann zwar eine feinere Verteilung erreicht werden, doch wird dadurch das Spektrum der Tropfengröße nicht eingeengt.

Klareis wurde durch ein Düsensystem gemäß Figur 7 erhalten. Ein Druckgefäß, ähnlich dem in Figur 3 skizzierten, dient als Wasserbehälter. Der not-

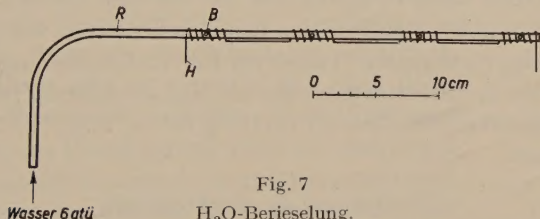


Fig. 7

H_2O -Berieselung.

- R* Kupferrohr \varnothing 6/4 mm; *B* Bohrungen \varnothing 0,15 mm; *H* Heizwicklung, 25 W

wendige Druck von 6 atü wird durch Prebluft erzeugt. Das Wasser verläßt die Düsen in Form eines feinen Strahles, der bei einer Windgeschwindigkeit von 10 m/s in Tropfen zerfällt, deren Hauptanteil (Tropfen von ca. 1 mm Durchmesser) nach 1 m Weglänge den Kanalboden erreicht. Die wirksamen Tropfen haben einen Durchmesser von ca. 0,1 mm. Der Wirkungsgrad dieser Methode ist ungünstig.

1.3 Messung der Windgeschwindigkeit

Die Messung der Windgeschwindigkeit unter vereisenden Bedingungen ist ein Problem, das in den USA. durch Verwendung geheizter Pitot-Rohre [1]¹⁾

¹⁾ Die Ziffern in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis auf S. 443.

gelöst wurde. In unserem Windkanal wird der Druckabfall an Düse II (Figur 1) mittels eines mit Heptan gefüllten Manometers gemessen. Die Eichung geschieht mit einem Handanemometer in trockener Luft. Die Meßgenauigkeit beträgt $\pm 0,5$ m/s.

1.4 Messung der Feuchtigkeit

Der Gehalt an flüssigem H_2O wird gemäß der Literatur vornehmlich unter Zuhilfenahme des sogenannten Icing-Meters, durch Wägung des an einem Zylindersystem abgelagerten Reifes, gemessen [2]. Es schien uns nötig, eine andere Methode zu verwenden, da hier eben diese Vereisungserscheinungen untersucht werden sollten. HARDY [3] hat eine Taupunktmethode angegeben: Die Luft wird samt den Tröpfchen aufgeheizt, bis alles Wasser verdampft ist. Dann wird der Taupunkt dieser aufgeheizten Luft bestimmt und der totale Wassergehalt errechnet. Wir benutzten das gleiche Prinzip für eine psychrometrische Messung. Ein Teil der klimatisierten Luft wird abgezapft und nach dem Passieren eines geheizten Rohres dem Psychrometer zugeführt. Die Heizwicklung im erwähnten Rohr (500 W) erwärmt die Luft um ca. $30^\circ C$. Die Meßgenauigkeit der Anordnung beträgt $\pm 0,05$ g/m³. Sie ist durch die Steilheit der Dampfdruckkurven bei niedrigen relativen Feuchtigkeiten bedingt. Bei höheren Wassergehalten ($> 0,6$ g/m³) ist diese Methode nicht mehr brauchbar, weil es offenbar nicht gelingt, alle Tropfen zu verdampfen. Die gemessenen Wassermengen fallen dann zu gering aus. Da wir eine aus dem Dampfkesselstand genau bestimmbare Menge in den Kanal geben, kann bei höheren Feuchtigkeiten direkt das verbrauchte Wasser zur Berechnung herangezogen werden.

Der Verlust am Sicherheitsventil und im Kanalvorderteil ist, wie der Nullversuch¹⁾ zeigt, konstant und beträgt bei $0,5$ g/m³ ca. 12%, bei $1,5$ g/m³ ca. 5% der Gesamtmenge.

1.5 Messung der Tropfengröße

Die Bestimmung der Größe von Nebeltropfen wurde von KNEUSEL [4] nach der Stokeschen Methode durchgeführt. Alle übrigen Verfahren, die auf Ausmessung von Spuren beruhen, ergeben keine absoluten Werte (ausgenommen die «Ranging chamber» von SCHAEFER [1]). DIEM [5] verwendete als Auffangkörper Glasplatten mit dünnen Ölschichten. Wir mußten feststellen, daß auf diese Weise die Tropfen sehr rasch verdampfen und deshalb kaum beobachtet werden können. Auch berußte Glasplatten [1] wurden als Träger benutzt, doch hatten wir Mühe, so feinen Ruß herzustellen, daß unsere, für atmosphärische Verhältnisse kleinen Tropfen noch erkennbar waren. Befriedigend waren die Resultate mit einer dünnen Gelatineschicht, die nach dem Verdampfen des

¹⁾ Der Nullversuch besteht darin, daß der Dampfkessel bei geschlossenem Dampfdozierungsventil (siehe Figur 3) auf Temperatur gehalten wird. Dabei spricht das Sicherheitsventil wie im Normalbetrieb an.

Lösungsmittels (H_2O) auf einem Objektträger zurückbleibt. Die Gelatine-lösung wird mit Methylenblau schwach gefärbt. Die Konzentration ist nicht kritisch, da auf jeder so behandelten Glasplatte Stellen gefunden werden, die gerade die richtige Lichtdurchlässigkeit haben. So aufgefangene Tropfen lassen infolge der Abplattung beim Auftreffen etwas zu große Spuren zurück; doch kam es hier in erster Linie darauf an, die Konstanz der Tropfengröße zu beurteilen.

1.6 Herstellung von Dünnschliffen

Der kristallographische Aufbau des Reifes muß an Dünnschliffen untersucht werden. Die Technik der Herstellung von Schneedünnschliffen wurde von DE QUERVAIN [6] beschrieben. In unserem Falle stellte sich als neues Problem die Beobachtung des Anwachsens am Träger. Es war nötig, ein Verfahren zu finden, das ein Loslösen des Reifes erübrigte. Nach Vorversuchen mit verschiedenen Ablöseverfahren wurde schließlich im Paraffin ein Körper gefunden, der, mit einer Folie vom Material des eigentlichen Vereisungskörpers umwickelt, ein sauberes Durchschneiden erlaubt und gleichzeitig die nötige mechanische Festigkeit aufweist. Aus Figur 2 ist der Aufbau des gesamten Versuchsstabes ersichtlich. Die Probeentnahme geht so vor sich, daß nach Beendigung des Anreifversuches, und während der Stab noch im Kanal steckt, das Paraffinstück durch leichten Druck abgebrochen und beim Kanalende herausgenommen wird. Dann bestäubt man den Reif mit Kohlepulver, damit der Dünnschliff an einer günstigen Stelle des Gefüges (Reifbaum) angesetzt werden kann (die Reifkonturen werden dadurch im weißen Einbettungsmittel sichtbar). Das weitere Vorgehen folgt dem üblichen Verfahren.

1.7 Messung des wahren Volumens

Zur Charakterisierung des Reifes schien es angebracht, eine Messung des wahren Volumens (exklusive Luftein-schlüsse) vorzunehmen. Zu diesem Zwecke wurde ein Volumenometer konstruiert. Das Prinzip des gewählten Apparates ist von PAALZOW [7] beschrieben worden (siehe Figur 9). Als Sperrflüssigkeit wurde CCl_4 verwendet. Für die numerische Auswertung der Messung

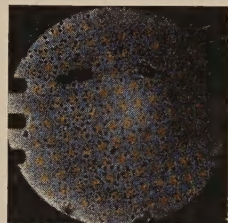


Fig. 8
Spuren von H_2O -Tropfen
(Bilddurchmesser
0,75 mm).

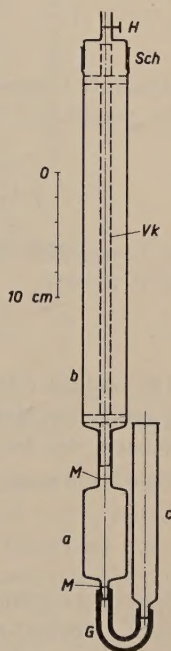


Fig. 9

Volumenometer.

<i>a, b, c</i>	Glasbehälter
<i>H</i>	Hahn
<i>Sch</i>	Schliff
<i>M</i>	Marke
<i>G</i>	Gummischlauch, 150 cm lang
<i>Vk</i>	Versuchskörper

wurde das Volumenometer mittels fester Körper bekannten Volumens geeicht. Zur Abschätzung der Meßgenauigkeit benutzte man die Formel für das Reifvolumen v , welche lautet:

$$v = v_0 - v_1 = a p_0 \left(\frac{1}{\Delta p} - \frac{1}{\Delta p_1} \right)$$

wobei:

a = Volumen des Behälters a , p_0 = Atmosphärendruck,
 v_0 = Volumen des Behälters b ohne Reif, Δp = Druckdifferenz ohne Reif,
 v_1 = Volumen des Behälters b mit Reif, Δp_1 = Druckdifferenz mit Reif.

Der Einfluß der Druckschwankungen ($\Delta p_0 \sim 5$ mm Hg) ergibt eine Ungenauigkeit zu

$$\Delta v = \frac{\partial v(p_0)}{\partial p_0} \Delta p_0 = a \left(\frac{1}{\Delta p} - \frac{1}{\Delta p_1} \right) \Delta p_0 \sim 0,047 \text{ cm}^3.$$

Die absolute Ungenauigkeit infolge Unschärfe des Δp und Δp_1 ($\pm 0,5$ mm CCl₄) ergibt gemäß dem Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz:

$$\Delta v = \sqrt{\left(\frac{\partial v(\Delta p)}{\partial \Delta p} \right)^2 (d\Delta p)^2 + \left(\frac{\partial v(\Delta p_1)}{\partial \Delta p_1} \right)^2 (d\Delta p_1)^2} = 0,6 \text{ cm}^3.$$

Diese Genauigkeit konnte *in praxi* nur durch Mittelbildung aus zehn Messungen erreicht werden.

1.8 Messung des scheinbaren Volumens

Die umhüllende Kurve des Reifes wird durch Anschneiden mit einem passend geformten Metallplättchen gewonnen. Auf diesem Plättchen zeichnet man die Kontur des Ansatzes auf und umfährt nachher die erhaltene Figur mit dem Planimeter (Genauigkeit $\pm 0,1 \text{ cm}^2$).

1.9 Temperaturmessung

Die Kanaltemperatur wird mit einem Thermometer bei T der Figur 1 gemessen. Daneben interessiert uns die Temperaturdifferenz zwischen Luft und Versuchskörper. Dazu ist in letzterem ein Kupfer-Konstantan-Thermoelement (Cu 0,05 mm, Konstantan 0,2 mm Durchmesser) eingebaut. Die eine Lötstelle liegt in einer Vertiefung an der Oberfläche des Körpers. Die beiden Drähte sind mittels Araldit¹⁾ in eine Kerbe eingegossen (siehe Figur 2). Man führt die Thermospannung einem Galvanometer mit Lichtzeigerregistrierung zu. Die kleinste meßbare Temperaturdifferenz beträgt $\pm 0,05^\circ \text{C}$.

¹⁾ «Araldit Gießharz B» der Firma Ciba AG., Basel.

2. Versuchsergebnisse

2.1 Die Reifbildung in Abhängigkeit der Temperatur und des Gehaltes an flüssigem Wasser

In einer Versuchsreihe von 16 Anreifversuchen wird bei festgehaltener Windgeschwindigkeit ($v = 5 \text{ m/s}$) und Tropfengröße (5μ Durchmesser) der Gehalt an flüssigem H_2O von $0,3 \text{ g/m}^3$ bis $1,5 \text{ g/m}^3$ verändert. Die Kanaltemperatur variiert als Parameter in vier Schritten von -5°C bis -17°C . Die Vereisungsbedingungen entsprechen denjenigen in einer im Entstehen begriffenen Wolke. Der Versuchskörper wird immer so lange angereift, bis der

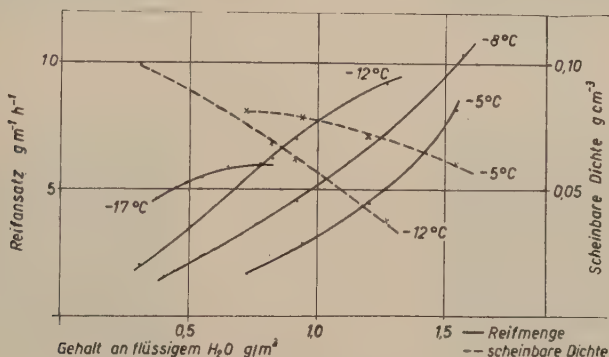


Fig. 10

Reifmenge und scheinbare Dichte als Funktion von T und H_2O
(mittlerer Barometerstand Weißfluhjoch 540 mm Hg).

Ansatz an der dicksten Stelle auf ca. 1 cm angewachsen ist, damit für alle Experimente ähnliche aerodynamische Bedingungen herrschen. In Figur 10 sind die Ergebnisse graphisch dargestellt.

Die Kurve für -12°C entspricht wahrscheinlich am ehesten dem Verlauf, wie er in der freien Atmosphäre vorkommt. Bei -5°C und -8°C hat man offenbar nur den konkaven Teil der -12°C -Kurve vor sich. Es gelang mit den vorhandenen Mitteln nicht, den H_2O -Gehalt so weit zu steigern, bis sich eine Abnahme des Wirkungsgrades der Anreifung zeigte. Diese ist dagegen bei -17°C stark ausgeprägt. Sie ist auf das Ausschneiden der H_2O -Tröpfchen infolge der Wirkung von Gefrierkernen zurückzuführen. Nach FINDEISEN [8] werden nämlich ab -12°C die sogenannten «Kerne erster Art» sprunghaft wirksam. Steigert man den H_2O -Gehalt über $0,78 \text{ g/m}^3$ (letzter Meßpunkt der -17°C -Kurve), so nimmt der als Schnee ausgeschiedene Anteil stark zu, wobei der gemessene H_2O -Gehalt nicht mehr weiter ansteigt. Die entstehenden Eiskristalle wachsen offenbar beim Durchlaufen des Kanals rasch und kommen auf die Rohrbasis zu liegen. ARENBERG [9] erwartet bei -12°C ein Vereisungs-

minimum, da bei dieser Temperatur die Dampfdruckdifferenz zwischen der flüssigen und festen Phase ein Maximum ist. In unseren Experimenten fehlt dieser Effekt gänzlich. Die Kurven bei -5°C und -8°C lassen die Möglichkeit einer weiteren Steigerung der Anreifung bei größeren H_2O -Mengen offen. Die *in praxi* große Gefährlichkeit von Vereisungserscheinungen bei relativ hohen Temperaturen liegt offenbar darin, daß auch in gefrierkeimhaltiger Luft (Laboratoriumsluft, Luft in Bodennähe) hohe H_2O -Gehalte existieren können. Im großen und ganzen bestätigen die Versuchsergebnisse die Vermutung, daß gefährliche Vereisungen nur bei Anwesenheit von beträchtlichen Mengen flüssigen Wassers (in dichten Bodennebeln, dichten Stratus- oder in Kumuluswolken) auftreten. Dies scheinen auch systematisch durchgeführte Statistiken von natürlichen Vereisungslagen zu beweisen [10].

Die scheinbare Dichte des Reifansatzes ist sowohl von T als auch vom H_2O -Gehalt abhängig. Je tiefer die Temperatur ist, desto rascher gefrieren die auftreffenden Tropfen und desto lockerer ist das Reifgefüge.

Der Mittelwert der wahren Dichte, aus den sechzehn Versuchen gewonnen, beträgt $0,87 \pm 0,08 \text{ g/cm}^3$. Die Unterschiede im Volumen der Lufteinschlüsse sind demnach kleiner als die Meßgenauigkeit.

2.2 Reifbildung mittels H_2O -Zerstäubung

Der mittels der Zerstäubungsanlage (gemäß Figur 6) erzeugte Reif ist, im Gegensatz zu dem unter Ziffer 2.1 beschriebenen, sehr dicht. Mit dieser Anordnung ist es nicht möglich, den H_2O -Gehalt unabhängig von der Tropfengröße zu variieren. Die letztere weist außerdem ein Spektrum auf, in welchem Tropfen von $20\text{--}200 \mu$ Durchmesser auftreten.

T -Kanal	H_2O -Gehalt	Reifmenge	Scheinbare Dichte	Reifart	T -Reif
-8°C	$1,72 \text{ g/m}^3$	$72,2 \text{ g/mh}$	$0,6 \text{ g/cm}^3$	opak	-5°C
-8°C	$2,68 \text{ g/m}^3$	126 g/mh	$0,62 \text{ g/cm}^3$	opak	$-4,5^{\circ}\text{C}$
-8°C	$3,36 \text{ g/m}^3$	227 g/mh	$0,70 \text{ g/cm}^3$	schwach transparent	$-3,5^{\circ}\text{C}$

Die H_2O -Berieselungsanlage (Figur 7) erzeugt Klareis (Figur 14). Ein H_2O -Gehalt kann nicht mehr definiert werden, da die Tropfen sehr ungleichmäßig über den Kanalquerschnitt verteilt sind (die großen Partikel erreichen den Versuchsstab überhaupt nicht). Pro Anreifung (gemäß Figur 14) wird ca. 800 g H_2O gebraucht. Die Temperaturerhöhung des Versuchskörpers beträgt ca. 7°C .

2.3 Materialeinfluß

Die Frage, ob die abgelagerte Reifmenge vom Material des Vereisungskörpers abhängig ist, beschäftigt die Praxis in hohem Maße. Freiluftversuche

konnten bisher keine eindeutige Antwort geben, da die Anreifbedingungen, selbst bei nahe beieinanderliegenden Objekten, meist örtlichen Schwankungen unterliegen. Es schien wünschbar, die zwei im Freileitungsbau hauptsächlich

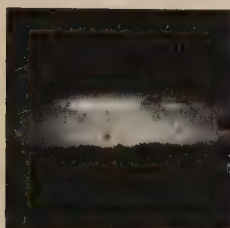


Fig. 11

Dichter Reif

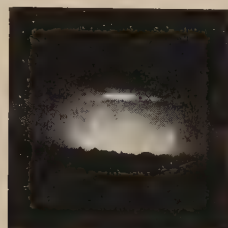
 $d = 0,099 \text{ g/cm}^3$, -12°C , $\text{H}_2\text{O} = 0,31 \text{ g/m}^3$.


Fig. 12

Lockerer Reif

 $d = 0,038 \text{ g/cm}^3$, -12°C , $\text{H}_2\text{O} = 1,27 \text{ g/m}^3$.


Fig. 13

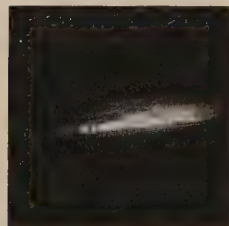
Reif mittels H_2O -Zerstäubung, opak.

Fig. 14

Eis mittels H_2O -Berieselung, transparent.

verwendeten Materialien, Cu und Al, zu untersuchen. Die kritischen Materialkonstanten sind die Wärmeleitfähigkeit und die Wärmekapazität w (spezifische Wärme mal Dichte).

Cu: $\lambda = 0,90 \text{ cal } ^\circ\text{C}^{-1} \text{ cm}^{-1} \text{ s}^{-1}$, $w = 0,84 \text{ cal } ^\circ\text{C}^{-1} \text{ cm}^{-3}$ (bei 18°C)

Al: $\lambda = 0,50 \text{ cal } ^\circ\text{C}^{-1} \text{ cm}^{-1} \text{ s}^{-1}$, $w = 0,58 \text{ cal } ^\circ\text{C}^{-1} \text{ cm}^{-3}$ (bei 18°C)

Der Vereisungsversuch ergab identische Ablagerungsmengen bei festgelegten Versuchsbedingungen: $T = -8^\circ\text{C}$, $v = 5 \text{ m/s}$, Tropfendurchmesser $= 5 \mu$. Diese

H_2O	Reifmenge Cu	Reifmenge Al
0,54 g/m ³	2,51 g/mh	2,30 g/mh
1,04 g/m ³	5,45 g/mh	5,45 g/mh
1,49 g/m ³	9,15 g/mh	9,35 g/mh

Unabhängigkeit gilt offenbar auch für nichtmetallische Materialien. So ist zum Beispiel der Reifbelag an einem Versuchskörper, der aus Al und Paraffin (ohne Folienumhüllung des letzteren) zusammengesteckt wurde, auf beiden Teilen absolut gleich stark. Ein augenfälliger Unterschied besteht hingegen in der Haftfähigkeit des Reifes an den beiden letztgenannten Materialien¹⁾.

2.4 Temperatureffekte

Die unter Ziffer 2.3 festgestellte Identität in bezug auf Vereisungswirkung von Cu und Al läßt vermuten, daß beim Mechanismus der Vereisungserscheinungen Temperatureffekte (Erwärmung des festen Körpers infolge Kristallisationswärme) keine entscheidende Rolle spielen.

Figur 15 zeigt ein typisches Temperatur-Zeit-Diagramm. Der Leiter ist kurz nach der Dampfzugabe um ca. $0,8^{\circ}\text{C}$ kälter als die Kanalluft, ein Zustand, der sich in ca. 25 min ausgeglichen hat. Kurzfristige Schwankungen von maximal $0,3^{\circ}\text{C}$ sind diesem Gang überlagert. Die obere Grenze eines erwarteten T -Effektes wäre:

Frei werdende Kristallisationswärme: (10 g/mh Reif, Al-Zylinder 1 cm Durchmesser, 22 cm lang)

$$\text{a) } Q_K \sim 48,5 \cdot 10^{-3} \text{ cal s}^{-1};$$

Wärmebedarf für den Al-Zylinder (39 g):

$$\text{b) } Q_Z \sim 8,36 \text{ cal } ^{\circ}\text{C}^{-1};$$

entstehende T -Differenz:

$$\text{c) } \Delta T = \frac{Q_K}{Q_Z} 5,8 \cdot 10^{-3} \text{ } ^{\circ}\text{C s}^{-1};$$

Wärmeabfluß durch den Luftstrom:

$$\text{d) } Q_L = \alpha f \Delta T \sim 65,2 \cdot 10^{-3} \text{ cal s}^{-1};$$

wobei α Wärmeübergangszahl, nach NUSSELT [11] berechnet zu

$$58,1 \text{ kcal m}^{-2} \text{ h}^{-1} \text{ } ^{\circ}\text{C}^{-1};$$

f = Oberfläche des Versuchskörpers und

$$\Delta T = 5,8 \cdot 10^{-3} \text{ } ^{\circ}\text{C}$$

(aus c).

Q_L ist somit von derselben Größenordnung wie Q_K , so daß das sich herausbildende ΔT kleiner sein muß als $5 \cdot 10^{-3} \text{ } ^{\circ}\text{C}$. Es wird durch die Schwankungen der Kanaltemperatur verdeckt und kann nicht beobachtet werden.

¹⁾ Ein Studium der Adhäsionseigenschaften bleibt einer spätern Untersuchung vorbehalten.

Bei der Anreifung mit H_2O -Zerstäubern tritt eine starke Erwärmung von 3 bis $5,5^\circ\text{C}$ auf. Sie rührt von der relativ hohen Tröpfchentemperatur (minimal $+3^\circ\text{C}$) her.

2.5 Einfluß der Windgeschwindigkeit

Die für die Versuche zur Verfügung stehenden H_2O -Mengen gestatteten nur eine geringe Steigerung der Windgeschwindigkeit. Es wurden zwei Versuche bei -8°C ausgeführt, deren Ergebnisse folgendermaßen lauten:

H_2O -Gehalt	v	Reifmenge
$0,73 \text{ g/m}^3$	5 m/s	3,40 g/mh
$0,73 \text{ g/m}^3$	8 m/s	2,07 g/mh
$0,58 \text{ g/m}^3$	5 m/s	2,53 g/mh
$0,58 \text{ g/m}^3$	10 m/s	0,64 g/mh

Es ist bemerkenswert, daß die Reifmengen mit wachsendem v abnehmen. Dieses Ergebnis steht in krassem Widerspruch zu der Langmuirschen Theorie [2]. Diese besteht in einer Analyse der Bahnen von H_2O -Tröpfchen, die einen Zylinder umströmen. γ_0 (Collector efficiency) stellt darin denjenigen Bruchteil der ungestörten, vor dem Zylinder liegenden halben Strahlbreite dar, deren Tropfen den Zylinder treffen. γ_0 ist eine Funktion einer charakteristischen Größe K und wird aus ihr durch numerische Integration gewonnen (Werte siehe Figur 16). K seinerseits ist proportional zu v und r^2 (Tropfenradius). γ_0 wächst monoton mit K , weshalb es auch mit v anwachsen müßte. Gemäß den obigen Versuchsergebnissen ist dies aber nicht der Fall. Es scheinen hier vielleicht verschiedene Effekte, wie zum Beispiel Fälschung der Messung des Tropfendurchmessers infolge Abplattung beim Auffangen, örtliche Temperaturänderungen beim Abbremsen der Luft und damit verbundene Änderungen der kinematischen Zähigkeit, zusammenzuwirken. Auch ist zu beachten, daß bei unsern kleinen Tropfen ($r \sim 2,5 \mu$) $K \sim 0,04$ bis $0,08$ beträgt und γ_0 eigentlich nicht mehr definiert ist (siehe Figur 16).

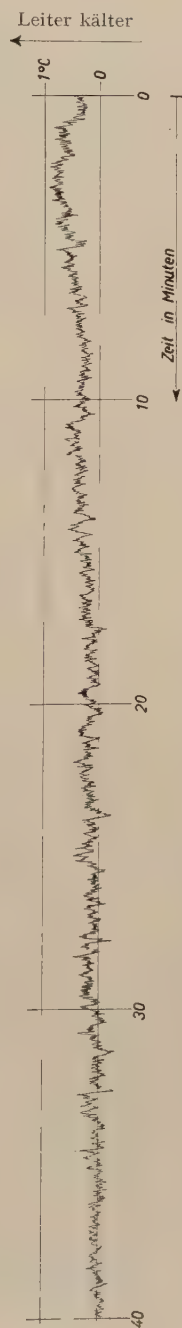


Fig. 15
Temperatur-Zeit-Diagramm. Anreifversuch: -8°C , H_2O $1,12 \text{ g/m}^3$, Reif $6,06 \text{ gm}^{-1} \text{ h}^{-1}$.

2.6 Einfluß des Zylinderdurchmessers

Versuche mit verschiedenen Zylinderdurchmessern wurden nicht ausgeführt. Hingegen sollen hier die Ergebnisse der theoretischen Betrachtungen von LANGMUIR [2] etwas erläutert werden. Die «Collector efficiency» y_0 ist vom Radius C des Versuchszylinders über die bereits erwähnte Größe K abhängig.

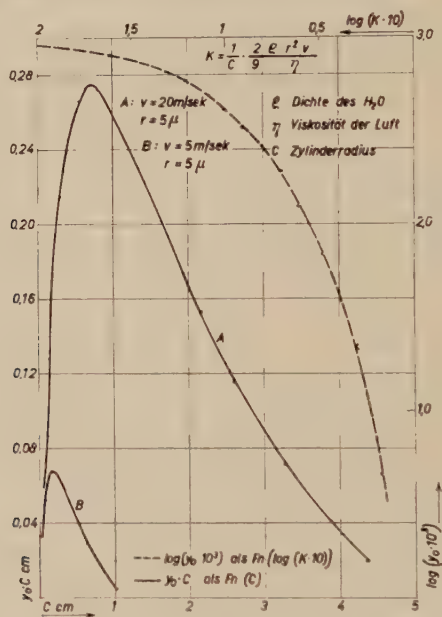


Fig. 16

In *praxi* ist das Produkt $y_0 C$ von Bedeutung, weil es ein Maß für die Eismenge darstellt, die unter festgehaltenen meteorologischen Bedingungen an Drähten verschiedener Dicke abgelagert wird (absoluter Wirkungsquerschnitt). In Figur 16 ist $y_0 C$ für zwei charakteristische Vereisungslagen (Kurven A und B) ausgewertet. Aus der Kurve, welche jedem K ein y_0 zuordnet, kann mit Hilfe der Formel in Figur 16 das Produkt $y_0 C$ für alle beliebigen Daten von r , v und C berechnet werden.

Leiterdurchmesser, die in der Nähe der Maxima liegen, sind besonders ungünstig. Bei schweren Vereisungslagen, bei denen r die Größenordnung von 5μ hat, befindet man sich mit $C = 0,5$ cm gerade in der Nähe des Maximums.

2.7 Geometrische Formen der Ansätze (siehe Figur 17)

Die meisten Reifformen, die aus H_2O -Tropfen von 5μ Durchmesser entstehen, sind sowohl in ihrem Anfangs- als auch in ihrem Endstadium vom so-

genannten Doppelgrat- (double-ridged) Typ. Es bilden sich also erst zwei schmale Reifstreifen, während der Staupunkt reiffrei bleibt. Je höher der H_2O -Gehalt und die Temperatur, desto ausgeprägter ist diese Form. Bei $-17^{\circ}C$ geht der Doppelgrattypus in den gerundeten (curved) Typus über. Reifformen, die aus mechanisch zerstäubtem H_2O entstehen, sind, unabhängig von der H_2O -Konzentration und der Temperatur, vom Grat- (ridged) Typus. Die Tatsache, daß die Bahnen kleiner Tropfen – im Gegensatz zu denjenigen der großen – schon auf kleine Änderungen der kinematischen Zähigkeit der Luft (ca. 6% für $\Delta T = 10^{\circ}C$) reagieren, wurde schon in Ziffer 2.5 festgestellt. Man befindet sich hier offenbar in einem Gebiet, in dem die Theorie über die Tropfenbahnen einer Verfeinerung bedarf.

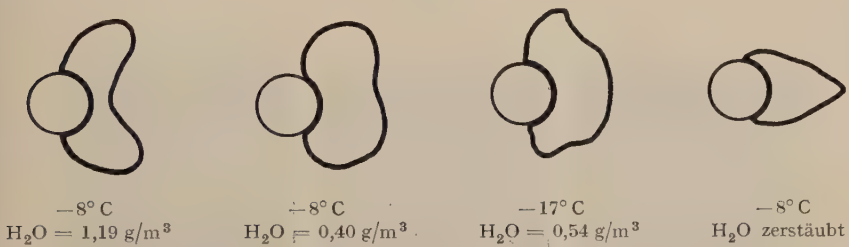


Fig. 17. Reifformen.

2.8 Kristallographisches

Um einen Einblick in die Art der Anwachsung des Reifes an Vereiskörper zu erhalten, wurden Dünnschliffe gemäß der in Ziffer 1.6 beschriebenen Technik hergestellt. Insbesondere interessierte der Zusammenhang zwischen der Oberflächenstruktur des Metalls und der Größe derjenigen Reifkomplexe, die einheitliche Orientierung der kristallographischen Achsen haben. In Figur 18

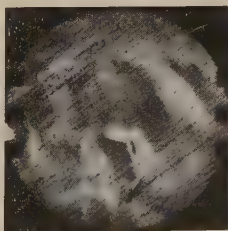


Fig. 18

Aluminiumfolie, geätzt mit HCl (Bilddurchmesser 5 mm).

ist die geätzte, aber ungeschliffene Aluminiumfolie abgebildet. Der Korndurchmesser liegt in der Größenordnung von 1,5 mm. Daneben ist eine Walzstruktur

von ca. 0,5 mm Rillenabstand sichtbar. Die Reifaufnahmen der Figur 19 zeigen, daß die Größen der gleich orientierten Reifhaufen von der Größenordnung der

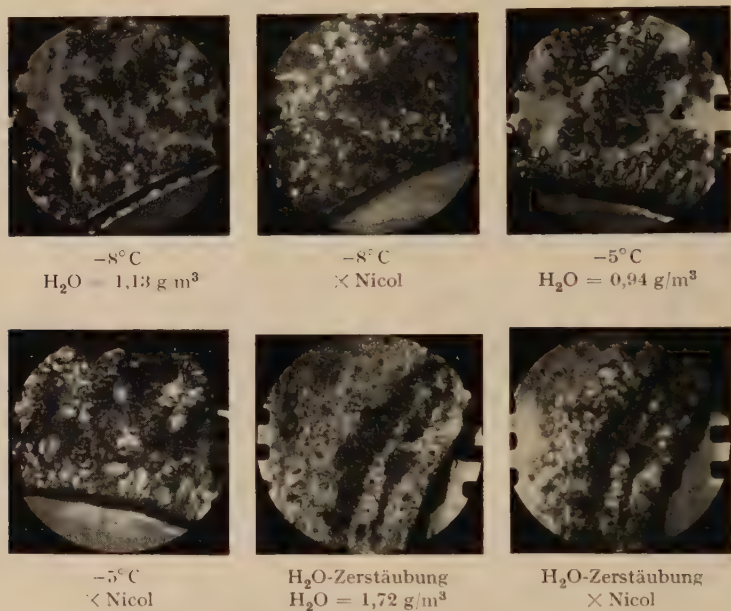


Fig. 19

Reif an Aluminiumfolie (Bilddurchmesser 2,2 mm).

Walzstruktur sind. Die oben erwähnten Rillen wirken somit als Kristallisationszentren.

Der Habitus verschiedener charakteristischer Reifformen ist aus Figur 20 ersichtlich. Eine Vorzugslage der optischen Achse in bezug auf die Achse des

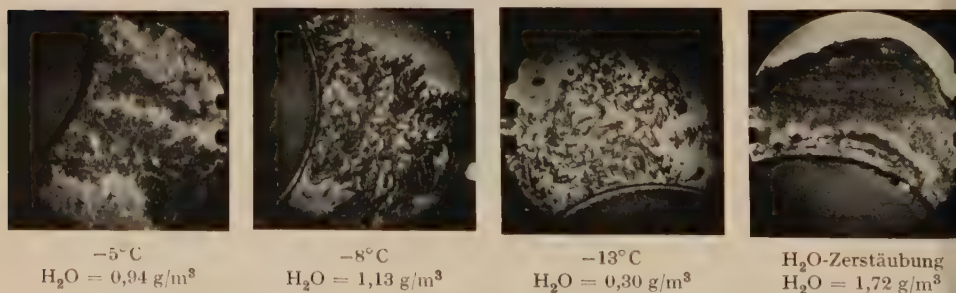


Fig. 20

Charakteristische Reifformen (Bilddurchmesser 7 mm).

Versuchskörpers wurde nicht festgestellt. Die einzelnen Reifbäume sind aus Elementen aufgebaut, die senkrecht zur Wachstumsrichtung eine Ausdehnung

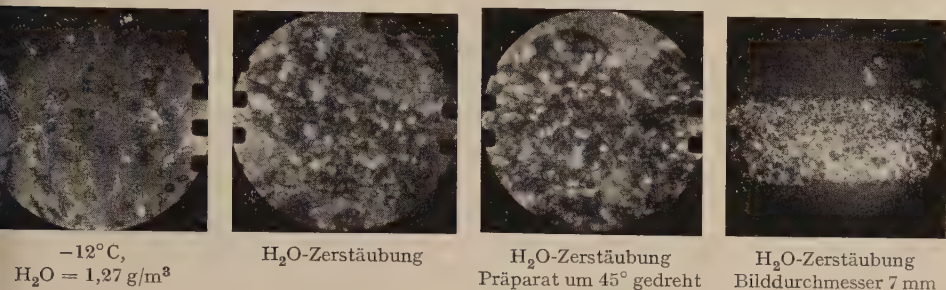


Fig. 21

Schnitte parallel der Achse des Versuchskörpers (Bild Durchmesser 2,2 mm, \times Nicol).

von ca. 0,2 mm haben (siehe Figur 21). Die genannten Elemente ihrerseits bestehen wieder aus einzelnen Kristalliten von ca. 0,05 mm Durchmesser.

ZWEITER TEIL

Freiluftversuche

Die Freiluftversuche haben den Zweck, die Temperaturverhältnisse an der Leiteroberfläche unmittelbar vor und während des ersten Anreifens zu beobachten. Es ist hauptsächlich die Frage abzuklären, ob die Bildung von natürlichen Vereisungen von einer, wenn auch minimalen, Unterkühlung des festen Körpers gegenüber der Luft abhängig ist. Daneben wollten wir die in der Literatur immer wieder auftretende Frage der Beeinflussung der Reifmenge durch das elektrische Feld beantworten. Es interessierte ferner der Einfluß der Oberflächengestalt des Leiters (verdrelltes mehradriges Seil oder glatter Einzeldraht).

1. Experimentelles

1.1 Freiluftreifanlage

Auf dem Dache des Instituts wurde eine Versuchsleitung erstellt, die aus vier glatten Aldrey-Drähten von 10 mm Durchmesser und einem zehnadrigen 10-mm-Seil besteht. Die Leitung steht senkrecht zu den Hauptwindrichtungen und ist 12 m lang. Die Abstände der Leiter sind aus Figur 22 ersichtlich. Zur quantitativen Charakterisierung muß der Reif ins Laboratorium gebracht werden, um daran dieselben Meßelemente zu bestimmen, wie dies im ersten Teil für künstlichen Reif beschrieben wurde. Dazu kann am Ende eines jeden

Leiters ein Versuchskörper aufgesteckt werden. Das Endstück aus Paraffin ist mit einer Aluminiumfolie umwickelt und ist für die kristallographische Untersuchung reserviert (siehe Figur 23).

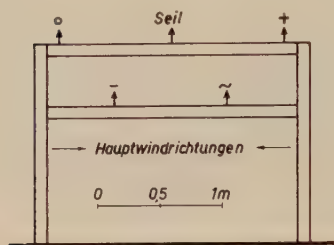


Fig. 22
Freiluftreifeanlage.

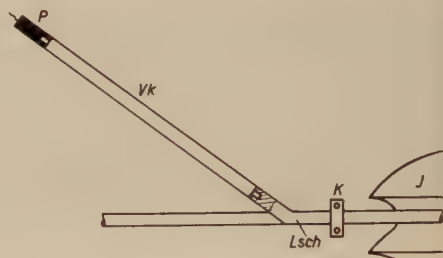


Fig. 23
Montage des Versuchskörpers.

<i>J</i>	Isolator	<i>Vk</i>	Versuchskörper
<i>K</i>	Klemme	<i>P</i>	Paraffinzyylinder mit Al-Folie
<i>Lsch</i>	Leiterschleife		

1.2 Die Hochspannungsanlage

Um den Einfluß des elektrischen Feldes auf den Reifansatz zu untersuchen, steht je ein Leiter unter 50 kV Wechselstrom-, 70 kV positiver und 70 kV negativer Spannung. Als Stromquelle dient ein Hochspannungstransformator¹⁾. Die Spannung wird einem Nadelgleichrichter zugeführt. Ein Dreiphasen-Kurzschluß-Ankermotor von 1/15 PS Leistung dreht eine Welle mit 1500 t./min. Senkrecht auf sie sind zwei um 90° zueinander stehende Stahlnadeln von 30 cm Länge gesteckt, welche an zwei Kontaktpaaren vorbeilaufen. Die Welle kann als Ganzes so an den Motor angekuppelt werden, daß die Nadeln jeweils im Maximum der Transformatorspannung an den Kontakten vorbeigehen. Der Motor hat zwei in bezug auf die Netzphase um 180° verdrehte Anlaufstellungen, so daß die Polarität der Gleichspannung jeweils nach dem Anlassen bestimmt werden muß. Dies geschieht durch Entladung eines Kugelkondensators über ein Galvanometer. Zwischen der positiven und der negativen Klemme (140 kV Spannungsdifferenz) ist eine 5 mm dicke Preßstoffplatte fest auf die Welle aufgezogen, um Überschlüge zu verhindern. Die Spannungen werden durch Polythlenkabel von 20 mm Isolationsdurchmesser der Freileitung auf dem Dache zugeführt. An den Durchführungen durch die Hausmauer (Holzfenster) entstehen leichte Glimmentladungen. Die Zeitkonstante (RC) eines Gleichstromleiters beträgt ca. 1/30 s, so daß die Welligkeit der Spannung nicht allzu groß sein dürfte.

¹⁾ Die Firma Haefely & Co. AG., Basel, stellte uns in freundlicher Weise einen ihrer Prüftransformatoren, Typ HET10 (10 kVA), zur Verfügung.

1.3 Gemessene Größen

Der entstehende Reif wird durch dieselben Größen charakterisiert, wie sie in Teil I beschrieben wurden. In der vereisenden Atmosphäre werden hingegen die in der Meteorologie üblichen Elemente (Temperatur und Feuchtigkeit) gemessen. Zur Messung der besonders wichtigen Temperaturdifferenz zwischen Leiteroberfläche und Luft ist an der erstern eine Thermosäule, bestehend aus drei Kupfer-Konstantan-Elementen, angebracht. Sie gestattet, Temperaturdifferenzen von $0,05^{\circ}\text{C}$ festzustellen.

2. Versuchsergebnisse

2.1 Meteorologische Bedingungen

Im Verlaufe von zwei Jahren wurden 12 Vereisungslagen messend verfolgt. Sie waren alle nur leichter Art. Die meisten Reiferscheinungen erfolgten jeweils bei Kaltlufteinbrüchen. Sie waren an das Auftreten von dichten Nebeln gebunden. Der erste Ansatz konnte, nach Erreichung der Sättigung gegenüber Eis (mit dem Schleuderpsychrometer gemessen), innerhalb weniger Minuten beobachtet werden. Nie wurde eine merkliche Vereisung infolge Übersättigung der Luft (bei klarem Himmel) festgestellt; selbst in Nächten, in denen auf der Schneeoberfläche dichte Reifschichten von mehreren Zentimeter Dicke auftraten, blieben die Versuchsleiter reiffrei.

2.2 Charakteristik des Reifes

Der Reif sah ähnlich aus wie der in Ziffer 2.1 des ersten Teiles beschriebene. Die scheinbare Dichte lag immer unter $0,1 \text{ g/cm}^3$. Die Tropfendurchmesser der Nebel waren, mit einer Ausnahme, von der Größenordnung 5μ . Bei der genannten Ausnahme handelte es sich um einen Nebelregen bei -2°C , der Klareis erzeugte. Diese Vereisungslage dauerte nur etwa eine halbe Stunde. Die Umrisse des normalerweise beobachteten lockeren Reifes zeigten im Gegensatz zum Windkanalreif eine nur schwach unsymmetrische Walzenform, trotzdem die Windgeschwindigkeit in der Regel $5\text{--}8 \text{ m/s}$ betrug. Offenbar kommt in dieser Erscheinung die Turbulenz der Atmosphäre in der Nähe der Erdoberfläche zum Ausdruck. Die maximal beobachtete Reifmenge betrug $2,5 \text{ g/mh}$ (-12°C). Aus Figur 10 entnimmt man der -12° -Kurve den zu dieser Reifmenge gehörigen Gehalt an flüssigem H_2O zu ca. $0,38 \text{ g/m}^3$. Die Dünnschliffe zeigten vollkommene Identität der Anwachsungserscheinungen mit den in Ziffer 2.8 des ersten Teiles beschriebenen.

2.3 Temperatureffekte

Die Verfolgung der Temperaturdifferenz zwischen Luft und Leiter zeigt, daß eine solche für das Auftreten des ersten Ansatzes nicht charakteristisch ist.

Die kurzfristigen Temperaturschwankungen sind von der Größenordnung $0,1^{\circ}\text{C}$. In einem Falle war der Leiter beim Eintauchen in den Nebel um $1,5^{\circ}\text{C}$ unterkühlt. Der Temperatúrausgleich erfolgte innerhalb 4–5 min; der erste Absatz bildete sich aber kaum rascher als bei Vereisungslagen ohne Unterkühlung des Leiters, nämlich innerhalb ca. 10 min.

2.4 Einfluß des elektrischen Feldes

Bei allen beobachteten Anreifungen zeigte es sich, daß der Habitus des entstehenden Reifes vom elektrischen Feld *abhängig* ist. Die unter Gleichspannung

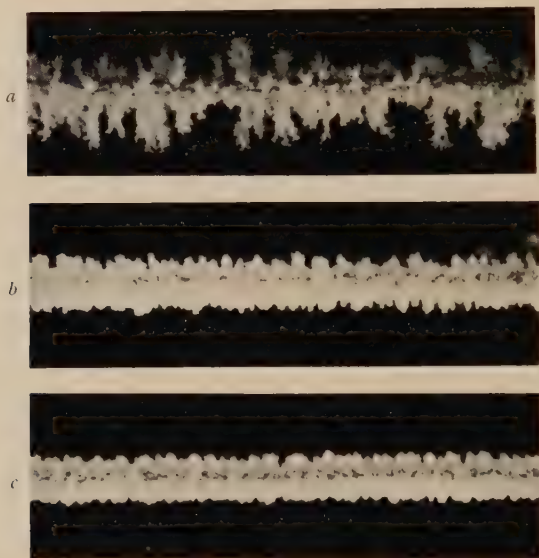


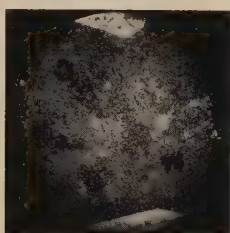
Fig. 24

Reif an der Freileitung (22. März 1950). a $70\text{ kV } +$; b $50\text{ kV } \sim$, c Nulleiter.

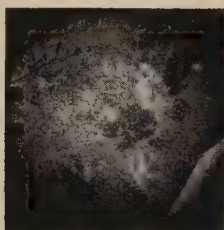
stehenden Leiter zeigten, unabhängig von ihrer Polarität, Reifformen, wie sie in Figur 24a dargestellt sind. Die charakteristischen Verästelungen nehmen im allgemeinen mit sinkender Temperatur und wachsender Windstärke zu. Die baumartigen Fortsätze bestehen aus Elementen von nahezu einheitlicher Orientierung (Figur 25).

Nulleiter und unter Wechselspannung stehender Leiter zeigen unter sich keinen Unterschied. Die Durchmesser der Reifwalzen sind bei den Gleichspannung führenden Kabeln maximal 50% größer als beim geerdeten Leiter. In bezug auf Reifmengen hingegen ist kein Feldeinfluß festzustellen. Bei der Interpretation dieser Tatsache muß beachtet werden, daß unsere Ergebnisse

nur für das Anfangsstadium des Ansatzes gelten. Es ist denkbar, daß der stark vergrößerte Querschnitt des unter Gleichspannung gebildeten Reifes bei schweren Vereisungslagen in bezug auf den absoluten Wirkungsquerschnitt des Leiters schwerwiegende Folgen haben kann.



× Nicol



× Nicol, Präparat 45° gedreht

Fig. 25

Reifbaum (70 kV +) senkrecht Wachstumsrichtung (Bilddurchmesser 7 mm).

2.5 Einfluß der Leiteroberfläche

An dem aus zehn Einzeldrähten zusammengesetzten Seil wurde jeweils am Ende der Beobachtungsdauer eine gleiche Reifmenge festgestellt wie an den glatten Leitern. Zwar scheint der erste Ansatz etwas prägnanter zu sein, weil er an wenige Zentren gebunden ist; aber schon bei einem Walzendurchmesser von 20 mm ist jede Unebenheit verschwunden, und der Leiter wirkt aerodynamisch gleich wie die glatten Drähte. Bei der Reifbildung infolge von Unterkühlung von nebelfreier Luft ist es vorgekommen, daß am Seil Reifkristalle ansetzten, während die glatten Leiter frei blieben; doch entstand daraus nie eine kompakte Reifwalze. Der Einfluß der Oberfläche auf die Haftung scheint jedoch bedeutend zu sein. Während am glatten Leiter schon wenige Minuten nach der Einwirkung von Sonnenstrahlen die ganze Last abfiel, blieb sie am Seil haften bis der Reif geschmolzen war und als Wasser abtropfte.

Schlußbemerkungen

Die vorliegende experimentelle Untersuchung verfolgte den Zweck, Richtlinien und Ansatzpunkte für eine Bekämpfung der Vereisungserscheinungen zu geben. Der in der Literatur manchmal vermutete «obscure mechanism» scheint sich auf die Anwesenheit eines thermodynamisch instabilen Zustandes der Atmosphäre zu beschränken. Der feste Körper stört diese Instabilität, indem er als Gefrierkern wirkt. Bekämpfungsmaßnahmen der Erscheinung können in drei prinzipiell verschiedenen Richtungen liegen:

- I. Man führt den Zusammenbruch der instabilen Lage durch Eingriff in die Luftmasse mittels künstlicher Gefrierkerne herbei, bevor sie auf das zu schützende Objekt trifft, eine Bekämpfungsart, die SCHAEFER [12] erwähnt. Der Eingriff ist eventuell nur bei Zuständen wirksam, bei denen die H_2O -Temperatur tiefer als ca. $-12^{\circ}C$ liegt.
- II. Man muß den zu schützenden Körper so verändern, daß er nicht als Gefrierkern wirken kann, indem man seine Temperatur dauernd über $0^{\circ}C$ hält.
- III. Man läßt eine primäre Vereisung zu, gestattet ihr aber nicht, über ein gewisses Maß zu wachsen, indem man das Eis abschmilzt oder seine Adhäsion am festen Körper so stark herabsetzt, daß es durch sein Eigengewicht abfällt.

Die Ergebnisse unserer Untersuchungen lauten:

1. Schwere Vereisungen erfolgen im Bereiche kleiner Windgeschwindigkeiten nur bei Anwesenheit von flüssigem H_2O oberhalb einer für jede Temperatur charakteristischen Menge. Die Kenntnis der flüssigen H_2O -Menge und der Temperatur ist als Voraussetzung zur Beurteilung der Vereisungsgefahr unentbehrlich.
2. Temperaturdifferenzen zwischen festem Körper und vereisender Luft sind für schwere Vereisungen unwesentlich, falls beide Temperaturen unter $0^{\circ}C$ liegen.
3. Die abgelagerte Eismenge ist unabhängig vom Material des Versuchskörpers.
4. Der Materialeinfluß beschränkt sich auf das Adhäsionsvermögen des Reifes.
5. Die Oberflächenbeschaffenheit (poliert oder rau) scheint ebenfalls einen entscheidenden Einfluß auf die Adhäsionskräfte auszuüben. Schon mikroskopisch kleine Unebenheiten wirken als Kristallisationszentren.
6. Das elektrische Wechselfeld hat weder einen Einfluß auf die Reifmenge noch auf die Struktur des Reifes.
7. Der an unter Gleichspannung stehenden Leitern angesetzte Reif hat ein charakteristisches Gefüge. Die Walzendurchmesser sind, obwohl die Reifmenge gleich derjenigen der Nulleiter ist, um maximal 50% erhöht. Das Endstadium dieses Effektes bei schweren Vereisungen (dicken Eiswalzen) ist noch zu untersuchen.

Der Autor möchte an dieser Stelle der Kommission für Vereisungsfragen, insbesondere den Herren Professoren E. AMSTUTZ, G. EICHELBERG, P. NIGGLI und dem Eidgenössischen Institut für Schnee- und Lawinenforschung für ihre aktive Mitarbeit sowie Herrn Prof. EDGAR MEYER für die Korrektur der Arbeit, herzlich danken.

Die Kommission für Vereisungsfragen ihrerseits ist folgenden Geldgebern zu Dank verpflichtet:

Eidgenössische Stiftung zur Förderung der schweizerischen Volkswirtschaft durch wissenschaftliche Forschung; Aluminium AG., Lausanne; Aare-Tessin AG., Olten; Brown, Boveri & Co., Baden; Câbleries et Tréfileries S.A., Cossonay; Eidgenössisches Luftamt; Generaldirektion der PTT.; Generaldirektion

der SBB.; Kommission für Hochspannungsfragen; Motor Columbus AG., Baden; Porzellanfabrik Langenthal; Schweizerische Metallwerke Selve, Thun; Schweizerischer Elektrotechnischer Verein; Verband schweizerischer Elektrizitätswerke.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] V. J. SCHAEFER, *Basic Icing Research*, Gen. Electr. Comp. Rep. Nr. 5539, S. 133 (1946).
- [2] J. LANGMUIR, *Super Cooled Water Droplets in Rising Currents of Cold Saturated Air*, Gen. Electr. Comp. Rep. Nr. RL 223 (1943/44).
- [3] J. K. HARDY, *Measurement of Free Water in Clouds Under Conditions of Icing*, Nat. Advis. Comm. Aeron. Rep. Nr. 4 J11 (1944).
- [4] St. KNEUSEL, *Größe der Wolkenelemente*, Meteorol. Z. 52, 65 (1935).
- [5] H. DIEM, *Messung der Größe der Wolkenelemente*, Ann. Hydrogr. marit. Meteorol. 75, 142 (1942).
- [6] M. DE QUERVAIN, Tätigkeits-Ber. Eidg. Inst. Schnee- u. Lawinenforschung; Schweiz. Z. Forstwesen (Dezember 1948).
- [7] A. PAALZOW, Wied. Ann. 13, 332 (1881).
- [8] W. FINDEISEN, *Untersuchungen über atmosphärische Eisteilchenbildung*, Ber. dtsh. Wetterdienstes USA.-Zone Nr. 1, 38 (1947).
- [9] D. L. ARENBERG, *Meteorological Factors Affecting the Icing of Aircrafts*, Dissertation, Massachusetts Inst. Technol. (1942).
- [10] Harvard-Mt. Washington Icing Res. Proj. Techn. Rep. Nr. 5676 (1946/47).
- [11] W. NUSSELT, *Handbuch der Physik*, Bd. 11 (Springer, Berlin 1928), S. 141.
- [12] V. J. SCHAEFER, *Experimental Meteorology*, ZAMP 1, 153, 217 (1950).

Summary

The first part of the present paper is devoted to an examination of the mechanism of icing phenomena. Artificial rime deposits of various types were produced in the wind tunnel and measurements carried out to establish the quantitative dependence of the deposit on temperature, H_2O -content, wind speed and material of the body to be iced. The growth of the rime on metallic surfaces was observed under the polarizing microscope.

Part II describes an arrangement for studying rime in the open air, the purpose of which was to discover whether natural icing is a result of temperature effects (minute differences in temperature between air and solid body). In addition, the influence of the electric field (conductor submitted to direct and alternating tension) on the type of deposit was examined and measured.

(Eingegangen: 19. 5. 1951.)

Strenge Berechnung typischer elektrostatischer Elektronenlinsen

Von WALTER GLASER und HERMANN ROBL, Wien¹⁾

1.

Um den Einfluß der Linsenspannung und der geometrischen Parameter auf die optischen Konstanten einer elektrostatischen Elektronenlinse in einem größeren Veränderungsbereich zu überblicken, ist es nötig, wenigstens für eine typische Feldform die Elektronenbahnen und damit auch die optischen Eigenschaften streng als Funktion der Systemparameter zu berechnen. Infolge der Kompliziertheit der Differentialgleichung der achsennahen Elektronenbahnen ist eine derartige strenge Berechnung zumeist nicht möglich, und man muß zu numerischen Integrationsmethoden Zuflucht nehmen. Diese aber haben den Nachteil, daß sie nur für einzelne numerische Werte der Systemparameter die Lösung liefern und auch da nur mit großem Rechenaufwand. Derartige Rechnungen, die für die starken elektrostatischen Einzellinsen der Elektronenmikroskope bisher nicht zu umgehen waren, liegen von H. BRUCK und L. ROMANI[1]²⁾, J. DOSSE[2] und E. G. RAMBERG[3] vor. Über die Anwendung der Ritzschen Methode zur Berechnung der optischen Konstanten starker elektrostatischer Einzellinsen, welche die numerische Integration vermeidet, soll demnächst berichtet werden. Wir werden in den folgenden Abschnitten wenigstens für Beschleunigungs- und Verzögerungslinsen mit Achsenpotentialen, die denen von Rohrlinsen nahekommen, eine strenge Berechnung der achsennahen Elektronenbahnen sowie des Öffnungsfehlers und Farbfehlers durchführen.

Kennt man ein streng durchrechenbares magnetisches Abbildungsfeld $B_z(z)$, so besteht die Möglichkeit, ein entsprechendes elektrostatisches Abbildungsfeld anzugeben. Man setzt die Differentialgleichung der Elektronenbahnen im Magnetfeld

$$r''(z) + \frac{c}{8m} \frac{1}{r} B_z^2(z) r(z) = 0 \quad (1)$$

und die des elektrostatischen Feldes

$$R''(z) + \frac{3}{16} \left[\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} \right]^2 R(z) = 0, \quad (2)$$

¹⁾ Institut für angewandte Physik der Technischen Hochschule Wien und Abteilung für Elektronenoptik der Siemens & Halske AG., Berlin.

²⁾ Die Ziffern in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis auf S. 469.

wobei

$$r(z) = \Phi^{-1/4}(z) R(z), \tag{3}$$

zueinander durch die Gleichung

$$\frac{e}{8\,m\,U} B_z^2(z) = \frac{3}{16} \left[\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} \right]^2 \tag{4}$$

in Beziehung, und bestimmt durch Integration das entsprechende elektrische Feld

$$\Phi(z) = \Phi_0 e^{\sqrt{\frac{16}{3} \cdot \frac{e}{8\,m\,U}} \int_0^z B_z(z) \, dz} \tag{5}$$

Die beiden unabhängigen Lösungen der Differentialgleichung (1) sind dann auch Lösungen der Differentialgleichung (2). So könnte man zum Beispiel aus der streng berechenbaren Feldform [4]

$$B_z(z) = \frac{B_0}{1 + \left(\frac{z}{a}\right)^2} \tag{6}$$

unmittelbar die Elektronenbahnen in dem elektrischen Feld

$$\Phi(z) = \Phi_0 e^{\frac{4}{\sqrt{3}} k \operatorname{arctg} \frac{z}{a}} \tag{7}$$

mit der Abkürzung

$$k = \sqrt{\frac{e}{8\,m\,U}} B_0 a \tag{8}$$

angeben. Diese Rechnung ist unter Benützung der bekannten Elektronenbahnen für das magnetische Glockenfeld (6) von R. G. E. HUTTER [5] durchgeführt worden. Auch die Farb- und Öffnungsfehlerkonstante ist auf diese Weise berechnet worden. Nun zeigt man aber sogleich, daß Felder vom Typus (5) und daher auch ein solches der speziellen Gestalt (7) für die Abbildung in Elektronenlinsen unbrauchbar sind. Denn das Potential $\Phi(z)$ ist so normiert, daß es dort verschwindet, wo die Elektronengeschwindigkeit Null ist, so daß $\Phi(z)$ der kinetischen Energie der Elektronen proportional ist. Es ist somit $\Phi(z)$ die Summe aus Beschleunigungsspannung U_A und Linsenpotential $\Phi_L(z) = U_L g(z)$

$$\Phi(z) = U_A + U_L g(z). \tag{9}$$

Die Spannung U_A muß also als frei wählbarer Parameter in den Ausdruck für $\Phi(z)$ additiv eingehen. Dies ist jedoch bei Feldern der Form (5) nicht der Fall, sondern die frei wählbare Konstante geht multiplikativ ein. Elektrische Abbildungsfelder von dem gleichen Typus mit multiplikativer Konstante hat auch R. REBSCH [6] seinen Abschätzungen des Öffnungsfehlers zugrunde gelegt. In

dem Buche *Grundzüge der theoretischen Elektronenoptik* von A. A. RUSTERHOLZ [7] ist dies gleichfalls übersehen worden.

R. RÜDENBERG [8] hat eine elektrostatische Elektronenlinse mit dem Potential

$$V(r, z) = U + \phi \left(z^2 - \frac{r^2}{2} \right) \quad (10)$$

durchgerechnet. Die Konstante U ist in der genannten Arbeit nicht angeschrieben, da zur Berechnung der Elektronenbahnen nur die Feldstärken herangezogen werden. Für beliebige Elektronenbahnen ergeben sich die Ausdrücke

$$\left. \begin{aligned} r(t) &= A \cos(vt - \alpha), \\ z(t) &= B \sinh \mu t + C \cosh \mu t \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

mit Integrationskonstanten α , A , B , C und den Beziehungen

$$v = \sqrt{\frac{e}{m} \phi}, \quad \mu = \sqrt{2 \frac{e}{m} \phi}, \quad (12)$$

wo e und m Ladung und Masse des Elektrons bedeuten. Durch unwesentliche Wahl der Zeitzählung kann $C = 0$ gesetzt werden. Nach Elimination der Zeit t ergibt sich dann

$$\frac{r(z)}{A} = \cos \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \sinh \left(\frac{z}{B} \right) - \alpha \right]. \quad (13)$$

Betrachtet man eine Bahn, welche die Achse in der Objektebene $z = z_0$ schneidet, so zeigt sich sofort, daß die Konstante B von der Bahnneigung dr/dz an der Stelle $z = z_0$ abhängt. Daraus folgt, daß die Koordinate $z = z_1$ der entsprechenden Bildebene von der objektseitigen Apertur abhängt, die Linse also mit sphärischer Aberration behaftet ist. Berechnen wir den Wert von B in Gleichung (13) für achsennahe Bahnen. Durch die Festsetzung $C = 0$ in (11) wird die Zeitzählung so gewählt, daß $z = 0$ für $t = 0$. Es folgt daraus

$$\left(\frac{dz}{dt} \right)_{z=0} = \mu B. \quad (14)$$

Setzt man für die kinetische Energie eines Elektrons näherungsweise

$$\frac{m}{2} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 = e \Phi(z),$$

wo $\Phi(z)$ das der Gleichung (10) entsprechende Achsenpotential

$$\Phi(z) = U + \phi z^2 \quad (15)$$

bedeutet, so ergibt sich aus (14) und (12) für die Konstante B der Wert

$$B = \sqrt{\frac{\bar{U}}{p}}. \quad (16)$$

In dem Ausdruck für die kinetische Energie wurde erstens das Potential $V(r, z)$ am Ort des Elektrons durch das Achsenpotential $\Phi(z)$ ersetzt und zweitens an Stelle der totalen Geschwindigkeit v die Komponente dz/dt angeschrieben. Setzt man B nach (16) in die Bahngleichung (13) ein, so erhält man gerade die Lösung der Differentialgleichung der achsennahen Bahnen, bei deren Herleitung ebenfalls die vorhin benutzte Näherung für die kinetische Energie Verwendung findet. Die gleichzeitige Beschränkung der Differentialgleichung der achsennahen Bahnen auf die erste und zweite Ableitung von $\Phi(z)$ ist in dem vorliegenden Fall mit keiner Vernachlässigung verbunden, da nach (15) alle höheren Ableitungen verschwinden.

Durch geeignete Anordnung von rotationshyperbolischen metallischen Elektroden kann das gewünschte Potential (10) im Innern der Linse realisiert werden. Da aber die Elektroden für den Durchtritt der Elektronen mit Öffnungen versehen werden müssen, wird an diesen Stellen der Potentialverlauf gestört. Der entsprechende Einfluß auf die Elektronenbahnen kann nicht durch Verkleinerung der Öffnungen beliebig herabgedrückt werden. Infolge dieses Umstandes geht der Vorteil der strengen Berechnung der achsennahen Bahnen im Innern der Linse wieder verloren.

Von einem Achsenpotential $\Phi(z)$, das als Repräsentant eines elektronenoptischen Abbildungsfeldes angesehen werden kann, muß verlangt werden, daß es folgende grundlegende Eigenschaften besitzt: Das Achsenpotential $\Phi(z)$ muß zwischen Objekt- und Bildebene definiert sein, mit wachsender Entfernung von der Feldmitte in konstante Werte übergehen und hat die Beschleunigungsspannung U_A als additives Glied zu enthalten. Schließlich soll das Potential eine strenge Berechnung der achsennahen Elektronenbahnen zulassen.

Wir werden im folgenden zwei Achsenpotentiale angeben, welche diese Forderung erfüllen und durch den Potentialverlauf einer Rohrlinse angenähert verwirklicht werden.

2.

Wir verwenden die Potentiale

$$\Phi(z) = U_A + \frac{U_L}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \left(-\frac{z}{a} \right) \quad (17)$$

und

$$\Phi(z) = U_A + \frac{U_L}{2} \left[1 + \frac{\frac{z}{a}}{1 + \left| \frac{z}{a} \right|} \right], \quad (18)$$

deren Verlauf in Figur 1 veranschaulicht ist. Wenn wir die Potentiale der

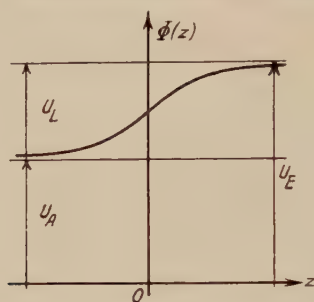


Fig. 1

Potentialverlauf in elektrostatischen Linsen. U_A Anfangspotential (Voltgeschwindigkeit der eintretenden Elektronen), U_L Linsenpotential, U_E Endpotential (Voltgeschwindigkeit der austretenden Elektronen).

Gleichungen (17) und (18) durch Indizes I und II unterscheiden, wird also

$$\frac{\Phi_I - U_A}{U_L} = \frac{1}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \left(- \frac{z}{a_I} \right) \quad (19)$$

und

$$\frac{\Phi_{II} - U_A}{U_L} = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{a_{II}}{1 + \frac{z}{a_{II}}} \right]; \quad (20)$$

daraus folgt

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{\Phi_I - U_A}{U_L} \right)_{z=0} = - \frac{1}{\pi a_I} \quad (21)$$

und

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{\Phi_{II} - U_A}{U_L} \right)_{z=0} = \frac{1}{2 a_{II}}. \quad (22)$$

Für $z/a = 1$ bzw. $z/a = -1$ ist in beiden Fällen $\Phi = U_A + U_L/4$ bzw. $\Phi = U_A + U_L \cdot 3/4$. Für eine Rohrlinse, bestehend aus zwei an den Potentialen U_A und $U_E = U_A + U_L$ liegenden Zylindern, deren Abstand sehr klein und deren Länge gegenüber ihrem gemeinsamen Durchmesser D sehr groß ist, gilt [9]

$$\frac{\Phi_{III} - U_A}{U_L} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin 2 \frac{z}{D} k}{k \sqrt{0(i k)}} dk. \quad (23)$$

Diese Funktion wird sehr gut durch

$$\frac{\Phi_{III} - U_A}{U_L} = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{tgh} 2,630 \frac{z}{D} \right] \quad (24)$$

approximiert [10], [11]. Daraus folgt

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{\Phi_{III} - U_A}{U_L} \right)_{z=0} = 1,315 \frac{1}{D}. \quad (25)$$

Wählt man die Längen a_I und a_{II} derart, daß die in den Gleichungen (21), (22) und (25) angegebenen Ableitungen der Potentiale, also die Feldstärken, in der Linsenmitte übereinstimmen, so erhält man $a_I = 0,242 D$ und $a_{II} = 0,380 D$. Unter dieser Annahme sind die Funktionen $(\Phi - U_A)/U_L$ in Abhängigkeit von z/D durch entsprechend numerierte Kurven in Figur 2 dargestellt. Die Ab-

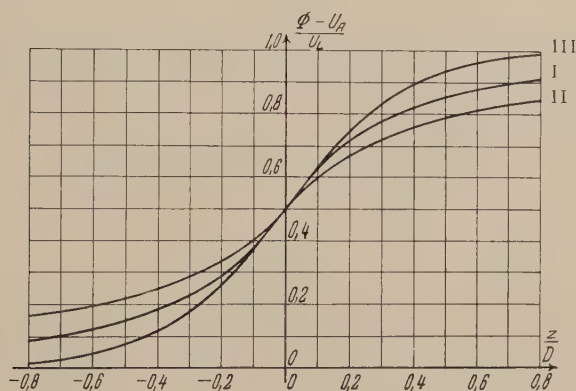


Fig. 2

Die Funktion $(\Phi - U_A)/U_L$. Die Kurven I und II entsprechen den Gleichungen (17) und (18). Durch die Kurve III wird gemäß Gleichung (22) der Potentialverlauf einer Rohrlinse mit dem Durchmesser D dargestellt.

weichung der Funktion $(\Phi_{II} - U_A)/U_L$ von der entsprechenden der Rohrlinse ist größer als die der Funktion $(\Phi_I - U_A)/U_L$. In der Umgebung von $z = 0$, wo der stärkste Einfluß des Feldes auf die Elektronenbahnen vorhanden ist, liegt dies hauptsächlich daran, daß die zweite Ableitung der Funktion $(\Phi_{II} - U_A)/U_L$ in $z = 0$ unstetig von einem endlichen positiven Wert auf einen endlichen negativen Wert springt, während die zweite Ableitung der beiden anderen Funktionen an dieser Stelle verschwindet.

3.

Um die Elektronenbahnen in dem Potentialfeld (17) zu berechnen, gehen wir von der Differentialgleichung der achsennahen Elektronenbahnen

$$r''(z) + \frac{1}{2} \frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} \cdot r'(z) + \frac{1}{4} \cdot \frac{\Phi''(z)}{\Phi(z)} r(z) = 0 \quad (26)$$

aus, die mit

$$r(z) = \Phi^{-1/4}(z) R(z) \quad (27)$$

in die bekannte Differentialgleichung

$$R''(z) + \frac{3}{16} \left[\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} \right]^2 R(z) = 0 \quad (28)$$

übergeht. Mit Hilfe der Transformation

$$z = -a \operatorname{ctg} \psi, \quad (0 < \psi < \pi) \quad (29)$$

die den Bereich der unabhängigen Veränderlichen $-\infty < z < +\infty$ auf das endliche Intervall $0 < \psi < \pi$ reduziert und deren geometrische Bedeutung aus Figur 3 hervorgeht, erhält man

$$R''(\psi) + 2 \operatorname{ctg} \psi R'(\psi) + \frac{3}{16} \left[\frac{\Phi'(\psi)}{\Phi(\psi)} \right]^2 R(\psi) = 0 \quad (30)$$

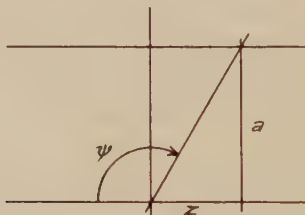


Fig. 3

Die geometrische Beziehung zwischen z , a und ψ .

Diese Differentialgleichung bringt man durch

$$R(\psi) = \frac{\varrho(\psi)}{\sin \psi} \quad (31)$$

in bekannter Weise auf die Normalform

$$\varrho''(\psi) + \left[1 + \frac{3}{16} \left(\frac{\Phi'(\psi)}{\Phi(\psi)} \right)^2 \right] \varrho(\psi) = 0. \quad (32)$$

Diese Differentialgleichung für die achsennahen Elektronenbahnen, bei der ψ auf das endliche Intervall $0 < \psi < \pi$ beschränkt ist, erweist sich für verschiedene Anwendungen als nützlich; insbesondere eignet sie sich zur Berechnung der elektronenoptischen Konstanten von Linsen mit Hilfe der Ritzschen Methode als Eigenwertproblem [12]. Die Transformation (29) ergibt für das Potential (17)

$$\Phi(\psi) = U_A + U_L \frac{\psi}{\pi}. \quad (33)$$

Wir bringen diesen Ausdruck auf die Form

$$\Phi(\psi) = \frac{U_L}{\pi} (k + \psi), \quad (34)$$

wobei

$$k = \frac{U_A}{U_L} \pi \quad (35)$$

gesetzt worden ist. Da die Anfangsspannung U_A positiv ist und für die Elektronenbahnen nur positive Werte des Achsenpotentials $\Phi(\psi)$ in Frage kommen, besitzt nach (35) und (34) sowohl k als auch $k + \psi$ gleiches Vorzeichen wie die Linsenspannung U_L . Je nach dem Vorzeichen von U_L wird die Linse als Beschleunigungs- oder Verzögerungslinse bezeichnet. Damit bei einer Verzögerungslinse mit negativer Linsenspannung U_L die Bedingung $\Phi(\pi) \geq 0$ erfüllt wird, muß $|k| \geq \pi$ sein. Da $U_A + U_L = U_E$, besteht der Zusammenhang

$$\frac{U_E}{U_A} = 1 + \frac{\pi}{k}, \quad k = \pi \frac{1}{\frac{U_E}{U_A} - 1}. \quad (36)$$

Es ergibt sich

$$\frac{\Phi'(\psi)}{\Phi(\psi)} = \frac{1}{k + \psi}. \quad (37)$$

Mit Hilfe der Substitution

$$|k + \psi| = \xi \quad (38)$$

erhalten wir

$$\varrho''(\xi) + \left[1 + \frac{3}{16} \xi^{-2}\right] \varrho(\xi) = 0. \quad (39)$$

Setzt man schließlich

$$\varrho(\xi) = \xi^{1/2} \eta(\xi), \quad (40)$$

so entsteht die Besselsche Differentialgleichung

$$\xi^2 \eta''(\xi) + \xi \eta'(\xi) + \left[\xi^2 - \frac{1}{16}\right] \eta(\xi) = 0 \quad (41)$$

mit den Lösungen

$$\eta(\xi) = J_{\pm 1/4}(\xi). \quad (42)$$

Jede achsennahe Bahn wird daher mit zwei Konstanten C_1 und C_2 durch den Ausdruck

$$\frac{r(\psi)}{a} = \frac{(k + \psi)^{1/4}}{\sin \psi} [C_1 J_{+1/4}(k + \psi) + C_2 J_{-1/4}(k + \psi)] \quad (43)$$

dargestellt. Zwei unabhängige Lösungen sind

$$u(\psi) = \frac{(k + \psi)^{1/4}}{\sin \psi} J_{+1/4}(k + \psi), \quad w(\psi) = \frac{(k + \psi)^{1/4}}{\sin \psi} J_{-1/4}(k + \psi). \quad (44)$$

Wegen (38) hat man in (43) und (44) sowie in den weiteren Rechnungen unter $(k + \psi)$ stets die absoluten Werte $|k + \psi|$ zu verstehen.

Die Objektebene sei $\psi = \psi_0$. Dann wird die Bildebene $\psi = \psi_1$ durch die Abbildungsgleichung

$$\frac{u(\psi_1)}{w(\psi_1)} = \frac{u(\psi_0)}{w(\psi_0)} \quad (45)$$

bestimmt. Für die in (44) angegebenen Lösungen erhält man

$$\frac{J_{+1/4}(k + \psi_1)}{J_{-1/4}(k + \psi_1)} = \frac{J_{+1/4}(k + \psi_0)}{J_{-1/4}(k + \psi_0)} \quad (46)$$

Die Funktion $J_{+1/4}(\xi)/J_{-1/4}(\xi)$ ist in Figur 4 dargestellt. Die Funktion besitzt Nullstellen bei $\xi = 0, 2,78, 5,91, \dots$ und wird unendlich bei $\xi = 2,01, 5,12, 8,25, \dots$. Die beiden Brennebenen $\psi = \psi_{F_0}$ und $\psi = \psi_{F_1}$ findet man mit $\psi_1 = \pi$ bzw. $\psi_0 = 0$. In (46) ist der Zusammenhang zwischen den Hilfs winkeln der Objekt- und Bildebene angegeben. Die Beziehung zwischen den entsprechen-

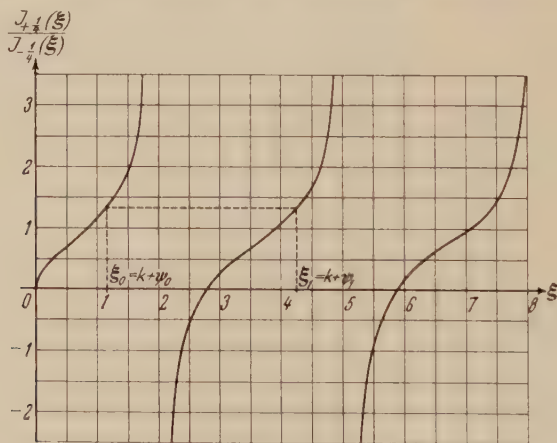


Fig. 4

Die Funktion $J_{+1/4}(\xi)/J_{-1/4}(\xi)$ und die Konstruktion des Bildortes.

den Koordinaten wird durch die Transformation $z = a \operatorname{ctg} \psi$ hergestellt. Die in Figur 4 angedeutete Konstruktion bezieht sich auf eine Beschleunigungslinse. Bei Verzögerungslinsen ist die Reihenfolge von $\xi_0 = |k + \psi_0|$ und $\xi_1 = |k + \psi_1|$ entgegengesetzt. Man überzeugt sich leicht davon, daß weder bei Beschleunigungs- noch bei Verzögerungslinsen mehrfache Abbildungen auftreten können.

Nun wollen wir zeigen, daß die Beziehung (46) zwischen Objekt- und Bildebene in die Abbildungsgleichung der gewöhnlichen Optik übergeht, wenn $|k| \gg 1$, die Linse nach Gleichung (36) also als schwach betrachtet werden

kann. Zu diesem Zweck benützen wir die bekannte Darstellung der Bessel-Funktionen

$$J_p(\xi) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \xi = P_p(\xi) \cos \alpha - Q_p(\xi) \sin \alpha \quad (47)$$

mit

$$\alpha = \xi - \left(p + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2} \quad (48)$$

und

$$\left. \begin{aligned} P_p(\xi) &= 1 - \frac{(4p^2 - 1)(4p^2 - 9)}{2!(8\xi)^2} \\ &\quad + \frac{(4p^2 - 1)(4p^2 - 9)(4p^2 - 25)(4p^2 - 49)}{4!(8\xi)^4} - \dots, \\ Q_p(\xi) &= \frac{4p^2 - 1}{8\xi} - \frac{(4p^2 - 1)(4p^2 - 9)(4p^2 - 25)}{3!(8\xi)^3} + \dots. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Für die Ordnung $p = +1/4$ wird $\alpha = \xi - 3\pi/8$, für $p = -1/4$ ist dagegen $\alpha = \xi - \pi/8$. Kennzeichnet man der Kürze halber die Argumente von P_p und Q_p , nämlich $k + \psi_1$ und $k + \psi_0$, durch hochgestellte Indizes (1) und (0) und schreibt man den gemeinsamen Ordnungsindex $1/4$ nicht weiter an, so geht die Abbildungsgleichung (46) über in

$$\left. \begin{aligned} &\frac{P^{(1)} \cos\left(k + \psi_1 - \frac{3}{8}\pi\right) - Q^{(1)} \sin\left(k + \psi_1 - \frac{3}{8}\pi\right)}{P^{(1)} \cos\left(k + \psi_1 - \frac{1}{8}\pi\right) - Q^{(1)} \sin\left(k + \psi_1 - \frac{1}{8}\pi\right)} \\ &= \frac{P^{(0)} \cos\left(k + \psi_0 - \frac{3}{8}\pi\right) - Q^{(0)} \sin\left(k + \psi_0 - \frac{3}{8}\pi\right)}{P^{(0)} \cos\left(k + \psi_0 - \frac{1}{8}\pi\right) - Q^{(0)} \sin\left(k + \psi_0 - \frac{1}{8}\pi\right)}. \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Setzen wir

$$P(k + \psi) = A \cos \chi, \quad Q(k + \psi) = A \sin \chi, \quad (51)$$

wonach

$$\frac{Q(k + \psi)}{P(k + \psi)} = \operatorname{tg} \chi \quad (52)$$

so folgt

$$\frac{\cos\left(k + \psi_1 - \frac{3}{8}\pi + \chi_1\right)}{\cos\left(k + \psi_1 - \frac{1}{8}\pi + \chi_1\right)} = \frac{\cos\left(k + \psi_0 - \frac{3}{8}\pi + \chi_0\right)}{\cos\left(k + \psi_0 - \frac{1}{8}\pi + \chi_0\right)}. \quad (53)$$

Beide Quotienten dieser Gleichung besitzen die Gestalt $\cos(\beta - \pi/4)/\cos \beta$. Nach Anwendung des Additionstheorems auf $\cos(\beta - \pi/4)$ erhält man

$$\operatorname{tg}\left(\chi_1 + k + \psi_1 - \frac{\pi}{8}\right) = \operatorname{tg}\left(\chi_0 + k + \psi_0 - \frac{\pi}{8}\right) \quad (54)$$

oder

$$\chi_1 + \psi_1 = \chi_0 + \psi_0 + \pi. \quad (55)$$

Für die Ordnung $\pm 1/4$ ist

$$P(\xi) = 1 - \frac{c_2}{\xi^2} + \dots, \quad Q(\xi) = \frac{c_1}{\xi} - \frac{c_3}{\xi^3} + \dots \quad (56)$$

mit den Konstanten $c_2 = 105/2048$, $c_1 = -3/32$, $c_3 = 35 \cdot 99/2 \cdot 8^3$. Für große ξ ist daher $Q/P \ll 1$. Die ersten Glieder dieses Quotienten lauten

$$\frac{Q}{P} = \frac{c_1}{\xi} + \frac{c_1 c_2 - c_3}{\xi^3} + \dots \quad (57)$$

Beschränkt man sich auf das erste Glied und ersetzt man in Gleichung (52) $\text{tg } \chi$ durch χ , so erhält man

$$\chi = -\frac{3}{32} \cdot \frac{1}{k + \psi}, \quad (58)$$

und es folgt aus Gleichung (55)

$$\psi_1 - \frac{3}{32} \cdot \frac{1}{k + \psi_1} = \psi_0 - \frac{3}{32} \cdot \frac{1}{k + \psi_0} + \pi. \quad (59)$$

Für $|k| \gg 1$ kann neben k näherungsweise $\psi_1 = \pi$ und $\psi_0 = 0$ gesetzt werden. Dann ergibt sich

$$\psi_1 - \psi_0 = \pi - \frac{3}{32} \cdot \frac{\pi}{k(k + \pi)}, \quad (60)$$

analog der bekannten Abbildungsgleichung $\psi_1 - \psi_0 = \pi/\omega$ für das magnetische Glockenfeld (6). Mit $\psi_1 = \pi$ bzw. $\psi_0 = 0$ folgt für den Hilfswinkel des objektseitigen bzw. bildseitigen Brennpunktes

$$\psi_{F_0} = \frac{3}{32} \cdot \frac{\pi}{k(k + \pi)}, \quad \psi_{F_1} = \pi - \frac{3}{32} \cdot \frac{\pi}{k(k + \pi)}. \quad (61)$$

Da für große k die Winkel $\pi - \psi_1$ und ψ_0 sehr klein sind, dürfen wir $\pi - \psi_1$ durch $\text{tg } (\pi - \psi_1) = -\text{tg } \psi_1$ und ψ_0 durch $\text{tg } \psi_0$ ersetzen. Die Transformationsgleichung (29) zeigt, daß $\text{tg } \psi = -a/z$. Man erhält daher

$$\frac{a}{z_1} - \frac{a}{z_0} = \frac{3}{32} \cdot \frac{\pi}{k(k + \pi)}. \quad (62)$$

Daraus ergibt sich für die Brennpunktkoordinaten

$$\left| \frac{z_F}{a} \right| = \frac{32}{3} \cdot \frac{k(k + \pi)}{\pi}. \quad (63)$$

Nach Gleichung (35) ist also

$$\left| \frac{z_F}{a} \right| = \frac{\pi}{3} 32 \left[\left(\frac{U_A}{U_L} \right)^2 + \left(\frac{U_A}{U_L} \right) \right]. \quad (64)$$

Zur Berechnung der Vergrößerung verwenden wir die allgemeingültige Beziehung

$$V = \frac{u(z_1)}{u(z_0)}, \quad (65)$$

wobei $u(z)$ eine beliebige Lösung der achsennahen Bahnen ist. Aus (44) folgt

$$V = \frac{\sin \psi_0}{\sin \psi_1} \left(\frac{k + \psi_1}{k + \psi_0} \right)^{1/4} \frac{J_{+1/4}(k + \psi_1)}{J_{+1/4}(k + \psi_0)}. \quad (66)$$

Um die Vergrößerung für den Fall zu bestimmen, daß sich die Objektebene nahe der objektseitigen Brennebene befindet, setzen wir

$$\frac{1}{\sin \psi_1} = \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \psi_1} = \sqrt{1 + \left(\frac{z_1}{a} \right)^2}. \quad (67)$$

Für $z_1/a \gg 1$ wird näherungsweise $1/\sin \psi_1 = z_1/a$ und

$$V = \frac{z_1}{a} \sin \psi_{F_0} \left(\frac{k + \pi}{k + \psi_{F_0}} \right)^{1/4} \frac{J_{+1/4}(k + \pi)}{J_{+1/4}(k + \psi_{F_0})}. \quad (68)$$

Wir wollen jetzt feststellen, welche Näherung sich für die in Gleichung (66) berechnete Vergrößerung bei schwachen Linsen, also für $|k| \gg 1$, ergibt. Zunächst kann der Quotient $\sin \psi_0/\sin \psi_1$ umgeformt werden, indem man den Gleichungen (60) und (61) entsprechend

$$\psi_1 = \psi_0 + \pi - \psi_{F_0} \quad (69)$$

schreibt. Damit wird

$$\frac{\sin \psi_0}{\sin \psi_1} = - \frac{1}{\sin \psi_{F_0}} \cdot \frac{1}{\operatorname{ctg} \psi_{F_0} - \operatorname{ctg} \psi_0}. \quad (70)$$

Infolge der Transformationsgleichung (29) ist aber $\operatorname{ctg} \psi_{F_0} = -z_{F_0}/a$ und $\operatorname{ctg} \psi_0 = -z_0/a$. Man erhält daher

$$V = \frac{1}{\sin \psi_{F_0}} \cdot \frac{a}{z_{F_0} - z_0} \left(\frac{k + \psi_1}{k + \psi_0} \right)^{1/4} \frac{J_{+1/4}(k + \psi_1)}{J_{+1/4}(k + \psi_0)}. \quad (71)$$

Es wäre nun naheliegend, den Quotienten $J_{+1/4}(k + \psi_1)/J_{+1/4}(k + \psi_0)$ gemäß der in den Gleichungen (47) bis (49) angegebenen Darstellung der Bessel-Funktionen zu entwickeln und ψ_1 mit Hilfe der Gleichung (60) durch einen Näherungswert zu ersetzen. Dieses Verfahren ist jedoch nicht zulässig, da hierbei der Quotient $J_{+1/4}(k + \psi_1)/J_{+1/4}(k + \psi_0)$ für bestimmte Werte des Parameters k unendlich wird, während bei Berücksichtigung der exakten Abbil-

dungsbeziehung zwischen ψ_1 und ψ_0 die Funktion $J_{+1/4}(k + \psi_1)$ für die gleichen Werte von k Nullstellen besitzt wie die Funktion $J_{+1/4}(k + \psi_0)$. Dies erkennt man bei Betrachtung der Gleichung (43). Wählt man nämlich $r(\psi_0) = 0$ und wird für bestimmte Werte von k $J_{+1/4}(k + \psi_0) = 0$, so muß für diese Werte von k die Konstante C_2 verschwinden. Damit aber in der zugehörigen Bildebene $r(\psi_1) = 0$ wird, muß auch $J_{+1/4}(k + \psi_1) = 0$ sein. Außerdem ist es klar, daß sich die Vergrößerung bei genügend klein gewähltem Wert von ψ_0 nur stetig ändern kann, wenn man den Parameter k stetig ändert. Um zu einem vernünftigen Ergebnis zu gelangen, muß man $|k|$ als so groß voraussetzen, daß in Gleichung (47) $P = 1$ und $Q = 0$ gesetzt werden kann. Mit der Näherung $\psi_0 = 0$, $\psi_1 = \pi$ erhält man dann

$$\frac{J_{+1/4}(k + \psi_1)}{J_{+1/4}(k + \psi_0)} = - \left(\frac{k}{k + \pi} \right)^{1/2}.$$

Bei Verwendung der Näherung $P = 1$ und $Q = 0$ ist die weitere Berücksichtigung von π neben k aber sinnlos. Mit dem entsprechenden Wert von ψ_{F_0} aus Gleichung (61) folgt daher

$$V = - \frac{32}{3} \cdot \frac{k^2}{\pi} \cdot \frac{a}{z_{F_0} - z_0}. \quad (72)$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit der bekannten Beziehung

$$V = - \frac{f_0}{z_{F_0} - z_0} \quad (73)$$

der gewöhnlichen Optik, wobei durch das negative Vorzeichen die Bildumkehr berücksichtigt wird, so erhält man

$$\frac{f_0}{a} = \frac{32}{3} \cdot \frac{k^2}{\pi}. \quad (74)$$

Derselbe Wert ergibt sich für f_1/a , wenn man, von den Gleichungen (60) und (61) ausgehend, $\psi_0 = \psi_1 - \psi_{F_1}$ schreibt und die Beziehung $V = -(z_1 - z_{F_1})/f_1$ verwendet. Häufig werden auch für starke elektrostatische Linsen «Brennweiten» angegeben. Man benützt hierzu entweder die Beziehung

$$V = - \frac{f_0}{z_{F_0} - z_0} = - \frac{z_1 - z_{F_1}}{f_1}$$

oder bedient sich einer bekannten Konstruktion, derzufolge

$$\frac{r_{z=\infty}}{f_0} = \left(\frac{dr}{dz} \right)_{z=z_{F_0}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{r_{z=-\infty}}{f_1} = - \left(\frac{dr}{dz} \right)_{z=z_{F_1}}.$$

Mit unseren exakten Formeln für die Vergrößerung und die Koordinaten z_{F_0} , z_0 bzw. z_1 , z_{F_1} sowie durch Berechnung der Quotienten

$$\frac{r_{z=\infty}}{\left(\frac{dr}{dz}\right)_{z=z_{F_0}}} \quad \text{bzw.} \quad -\frac{r_{z=-\infty}}{\left(\frac{dr}{dz}\right)_{z=z_{F_1}}}$$

wären wir in der Lage gewesen, festzustellen, in welchem Bereich des Linsenparameters k die nach beiden Methoden berechneten «Brennweiten» mit einer gewissen Genauigkeit übereinstimmen. Leider sind die uns zur Verfügung stehenden Tabellen der Bessel-Funktionen [13] in zu großen Intervallen tabelliert, um diese Frage beantworten zu können.

Wir wenden uns jetzt der Berechnung des Öffnungsfehlers zu. Für die im Öffnungsfehler

$$\frac{\Delta r}{V} = C_\delta \alpha^3 \quad (75)$$

neben der objektseitigen Apertur α auftretende Konstante C_δ gilt [5]

$$C_\delta = \frac{1}{16 \Phi^{1/2}(z_0)} \int_{z_0}^{z_1} \Phi^{-3/2} \left(\Phi''^2 - \frac{5}{2} \cdot \frac{\Phi'^2 \Phi''}{\Phi} + \frac{5}{2} \cdot \frac{\Phi'^4}{\Phi^2} - \frac{1}{4} \Phi' \Phi''' \right) r^4 dz, \quad (76)$$

wobei die Bahn $r(z)$ die Bedingungen

$$r(z_0) = r(z_1) = 0, \quad r'(z_0) = 1 \quad (77)$$

erfüllen muß. Die in Gleichung (43) angegebene Elektronenbahn schneidet die Achse in der Objektebene $\psi = \psi_0$, wenn

$$C_1 J_{+1/4}(k + \psi_0) + C_2 J_{-1/4}(k + \psi_0) = 0. \quad (78)$$

Es ist also

$$C_2 = -C_1 \frac{J_{+1/4}(k + \psi_0)}{J_{-1/4}(k + \psi_0)}, \quad (79)$$

so daß nach Einführung einer neuen Konstanten

$$r(\psi) = a C \frac{(k + \psi)^{1/4}}{\sin \psi} \{ J_{-1/4}(k + \psi_0) J_{+1/4}(k + \psi) - J_{+1/4}(k + \psi_0) J_{-1/4}(k + \psi) \}. \quad (80)$$

Wir berechnen die Ableitung $(dr/dz)_{z_0}$ aus

$$\left(\frac{dr}{dz}\right)_{z_0} = \left(\frac{dr}{d\psi}\right)_{\psi_0} \left(\frac{d\psi}{dz}\right)_{\psi_0}. \quad (81)$$

Für die Ableitungen der Zylinderfunktionen $Z_x(\xi)$ gelten die Formeln

$$Z'_p(\xi) = -\frac{p}{\xi} Z_p(\xi) + Z_{p-1}(\xi) = \frac{p}{\xi} Z_p(\xi) - Z_{p+1}(\xi). \quad (82)$$

Für die Ordnung $p = +1/4$ und $p = -1/4$ folgt daraus

$$\left. \begin{aligned} J'_{+1/4}(\xi) &= -\frac{1}{4\xi} J_{+1/4}(\xi) + J_{-3/4}(\xi), \\ J'_{-1/4}(\xi) &= -\frac{1}{4\xi} J_{-1/4}(\xi) - J_{+3/4}(\xi). \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

Für $\psi = \psi_0$ verschwindet der Ausdruck in der geschweiften Klammer von (80). Daher wird

$$\left(\frac{dr}{d\psi} \right)_{\psi_0} = a C \frac{(k + \psi_0)^{1/4}}{\sin \psi_0} K, \quad (84)$$

wobei

$$\left. \begin{aligned} K &= J_{-1/4}(k + \psi_0) \left[-\frac{1}{4(k + \psi_0)} J_{+1/4}(k + \psi_0) + J_{-3/4}(k + \psi_0) \right] \\ &\quad - J_{+1/4}(k + \psi_0) \left[-\frac{1}{4(k + \psi_0)} J_{-1/4}(k + \psi_0) - J_{+3/4}(k + \psi_0) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

Man erhält also

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{dr}{d\psi} \right)_{\psi_0} &= a C \frac{(k + \psi_0)^{1/4}}{\sin \psi_0} \\ &\quad \times \{ J_{-1/4}(k + \psi_0) J_{-3/4}(k + \psi_0) + J_{+1/4}(k + \psi_0) J_{+3/4}(k + \psi_0) \}. \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

Aus der Transformation $z = -a \operatorname{ctg} \psi$ folgt

$$\left(\frac{d\psi}{dz} \right)_{\psi_0} = \frac{1}{a} \sin^2 \psi_0. \quad (87)$$

Die Gleichungen (81), (86) und (87) ergeben

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{dr}{dz} \right)_{z_0} &= C \sin \psi_0 (k + \psi_0)^{1/4} \\ &\quad \times \{ J_{-1/4}(k + \psi_0) J_{-3/4}(k + \psi_0) + J_{+1/4}(k + \psi_0) J_{+3/4}(k + \psi_0) \}. \end{aligned} \right\} \quad (88)$$

Berechnet man aus diesem Ausdruck C für $(dr/dz)_{z_0} = 1$, um die in der Gleichung (77) enthaltene Bedingung $r'(z_0) = 1$ zu erfüllen, so ergibt sich nach Gleichung (80)

$$r(\psi) = \frac{a}{\sin \psi_0 \sin \psi} \left(\frac{k + \psi}{k + \psi_0} \right)^{1/4} Q(\psi), \quad (89)$$

wobei

$$Q(\psi) = \frac{J_{-1/4}(k + \psi_0) J_{+1/4}(k + \psi) - J_{+1/4}(k + \psi_0) J_{-1/4}(k + \psi)}{J_{-1/4}(k + \psi_0) J_{-3/4}(k + \psi_0) + J_{+1/4}(k + \psi_0) J_{+3/4}(k + \psi_0)}. \quad (90)$$

Führt man nun im Integranden der Gleichung (76) die neue Veränderliche ψ ein und beachtet man bei der Umrechnung der Ableitungen nach z auf Ableitungen nach ψ die nach Gleichung (34) geltenden Beziehungen

$$\Phi = U(k + \psi), \quad \frac{d\Phi}{d\psi} = U, \quad \frac{d^2\Phi}{d\psi^2} = \frac{d^3\Phi}{d\psi^3} = 0, \quad (91)$$

wobei der Kürze halber die Konstante U_L/π durch U ersetzt wird, so ergibt sich mit dem oben berechneten Wert von $r(\psi)$

$$\frac{C_\delta}{a} = \frac{1}{K} \int_{\psi_0}^{\psi_1} L(\psi) M(\psi) d\psi, \tag{92}$$

wobei

$$\left. \begin{aligned} K &= 32 \sin^4 \psi_0 (k + \psi_0)^{3/2} \\ &\times [J_{-1/4}(k + \psi_0) J_{-3/4}(k + \psi_0) + J_{+1/4}(k + \psi_0) J_{+3/4}(k + \psi_0)]^4, \\ L(\psi) &= (4 \cos^2 \psi + 1) (k + \psi)^{-1/2} - 10 \sin \psi \cos \psi (k + \psi)^{-3/2} \\ &\quad + 5 \sin^2 \psi (k + \psi)^{-5/2}, \\ M(\psi) &= [J_{-1/4}(k + \psi_0) J_{+1/4}(k + \psi) - J_{+1/4}(k + \psi_0) J_{-1/4}(k + \psi)]^4. \end{aligned} \right\} \tag{93}$$

}

Man erkennt sofort, daß die Öffnungsfehlerkonstante wegen des Gliedes $\sin^4 \psi_0$ in K sehr stark von der Lage der Objektebene abhängt. Da die Objektebene jedenfalls vor der objektseitigen Brennebene liegen muß und die Entfernung der Brennebene von der Linsenmitte mit zunehmendem Wert des Parameters k anwächst, wird die Öffnungsfehlerkonstante für schwache Linsen sehr große Werte annehmen. Dies liegt daran, daß bei solchen Linsen die vom Achsenpunkt der Objektebene mit gegebenem Neigungswinkel ausgehenden Elektronen wegen der großen Entfernung dieser Ebene von der Linsenmitte mit großem Achsenabstand in das Abbildungsfeld gelangen. Berechnet man also mit Hilfe der Gleichungen (92) und (93) die Öffnungsfehlerkonstante für $\psi_0 = \psi_{F_0}$, das heißt für sehr große Entfernung der Bildebene von der Linsenmitte, so wird der Wert der Öffnungsfehlerkonstante wesentlich von ψ_{F_0} und damit von k abhängen. Nicht so leicht ist die Abhängigkeit der Öffnungsfehlerkonstante von dem Parameter k zu übersehen, wenn man die Objektebene festhält. Für den Winkel $\psi_0 = 0,05$, der etwa 3° entspricht, ist C_δ/a für drei Werte von k berechnet worden. Die folgende Tabelle¹⁾ enthält neben den Er-

k	U_E/U_A	C_δ/a
0,15	22	$2,8 \cdot 10^3$
0,35	9,9	$2,6 \cdot 10^3$
0,75	5,2	$0,66 \cdot 10^3$

gebnissen noch die den Parametern k entsprechenden Werte des Spannungs-

¹⁾ Die numerischen Rechnungen in dieser Arbeit wurden von den Herren K. BAUMANN und A. KRIEGISCH durchgeführt.

verhältnisses U_E/U_A . In diesem Fall wird also die Öffnungsfehlerkonstante mit abnehmendem Spannungsverhältnis U_E/U_A kleiner.

Nehmen wir jetzt die Berechnung des Farbfehlers in Angriff. Es sei $r(z)$ eine Bahn, welche die Achse bei gegebenem Anfangspotential U_A in der Objektebene $\psi = \psi_0$ und in der Bildebene $\psi = \psi_1$ schneidet. Eine Bahn mit dem Anfangspotential $U_A + \Delta U_A$, die vom gleichen Objektpunkt ausgeht, wird dann in der Bildebene einen Achsenabstand

$$\Delta r = \left(\frac{\partial r}{\partial U_A} \right)_{\psi_1} \Delta U_A \quad (94)$$

besitzen. Setzen wir

$$\frac{\Delta r}{V} = \alpha C_F \frac{\Delta U_A}{U_A}, \quad (95)$$

wobei V die Vergrößerung und α die objektseitige Apertur bedeutet, so ergibt sich für die Farbfehlerkonstante

$$C_F = \frac{U_A}{\alpha V} \left(\frac{\partial r}{\partial U_A} \right)_{\psi_1}. \quad (96)$$

Da

$$\left(\frac{\partial r}{\partial U_A} \right)_{\psi_1} = \left(\frac{\partial r}{\partial k} \right)_{\psi_1} \frac{\partial k}{\partial U_A} \quad (97)$$

und nach Gleichung (35) $k = \pi U_A/U_L$, also $\partial k/\partial U_A = \pi/U_L$ oder

$$\frac{\partial k}{\partial U_A} = \frac{k}{U_A} \quad (98)$$

erhält man

$$C_F = \frac{k}{\alpha V} \left(\frac{\partial r}{\partial k} \right)_{\psi_1}. \quad (99)$$

Ersetzt man nun in Gleichung (88) die Ableitung $(dr/dz)_z$ durch α , so ergibt die Einführung der Konstanten C in Gleichung (80)

$$r(\psi) = \frac{a \alpha}{\sin \psi_0 \sin \psi} \left(\frac{k + \psi}{k + \psi_0} \right)^{1/4} Q(\psi) \quad (100)$$

mit dem in Gleichung (90) angegebenen Wert von $Q(\psi)$. Da zufolge der Abbildungsgleichung (46) der Quotient $Q(\psi)$ an der Stelle $\psi = \psi_1$ verschwindet, liefert die partielle Ableitung nach k

$$\left(\frac{\partial r}{\partial k} \right)_{\psi_1} = \frac{a \alpha}{\sin \psi_0 \sin \psi_1} \left(\frac{k + \psi_1}{k + \psi_0} \right)^{1/4} \frac{K}{L}, \quad (101)$$

wobei

$$\left. \begin{aligned} K &= J_{+1/4}(k + \psi_0) J_{+3/4}(k + \psi_1) - J_{+3/4}(k + \psi_0) J_{+1/4}(k + \psi_1) \\ &\quad + J_{-1/4}(k + \psi_0) J_{-3/4}(k + \psi_1) - J_{-3/4}(k + \psi_0) J_{-1/4}(k + \psi_1), \\ L &= J_{-1/4}(k + \psi_0) J_{-3/4}(k + \psi_0) + J_{+1/4}(k + \psi_0) J_{+3/4}(k + \psi_0). \end{aligned} \right\} \quad (102)$$

Nach Gleichung (99) wird

$$\frac{C_F}{a} = \frac{1}{V} \cdot \frac{k}{\sin \psi_0 \sin \psi_1} \left(\frac{k + \psi_1}{k + \psi_0} \right)^{1/4} \frac{K}{L} . \tag{103}$$

Führt man in diesen Ausdruck den in Gleichung (66) angegebenen Wert der Vergrößerung ein, so erhält man schließlich

$$\frac{C_F}{a} = \frac{k}{\sin^2 \psi_0} \cdot \frac{J_{+1/4}(k + \psi_0)}{J_{+1/4}(k + \psi_1)} \cdot \frac{K}{L} , \tag{104}$$

wobei K und L den Gleichungen (102) zu entnehmen sind. Die folgende Tabelle enthält Werte der Farbfehlerkonstante für $\psi_0 = 0,05$. Neben den Linsenpara-

k	U_E/U_A	C_F/a
0,15	22	- 20,9
0,35	9,9	- 29,0
0,75	5,2	- 28,2

metern k sind wieder die zugehörigen Spannungsverhältnisse U_E/U_A eingetragen. Das negative Vorzeichen der Farbfehlerkonstante rührt davon her, daß die in Gleichung (95) enthaltene Vergrößerung infolge der Bildumkehr negativ ist. Ersetzt man in Gleichung (95) V durch $|V|$, so wird C_F positiv. Zwischen den Linsenparametern $k = 0,15$ und $k = 0,75$ nimmt der Betrag der Farbfehlerkonstante einen maximalen Wert an.

4.

Eine weitere Möglichkeit zur strengen Lösung der Differentialgleichung der achsennahen Bahnen bietet die Transformation

$$\left. \begin{aligned} z &= a \frac{x}{1 - |x|} , & (-1 < x < +1) \\ x &= \frac{\frac{z}{a}}{1 + \left| \frac{z}{a} \right|} , & (-\infty < z < +\infty) \end{aligned} \right\} \tag{105}$$

in Verbindung mit dem in Gleichung (18) angegebenen Potential. Mit

$$z = a \frac{x}{1 + x}$$

für $-1 < x < 0$ und

$$z = a \frac{x}{1 - x}$$

für $0 < x < +1$ geht die Differentialgleichung (28) über in

$$R''(x) \pm \frac{2}{1 \pm x} R'(x) + \frac{3}{16} \left[\frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)} \right]^2 R(x) = 0, \quad (106)$$

wobei von nun an die oberen Vorzeichen im Intervall $-1 < x < 0$ und die unteren Vorzeichen im Intervall $0 < x < +1$ gelten. Mit

$$R(x) = \frac{\varrho(x)}{1 \pm x} \quad (107)$$

erhält man die Normalform

$$\varrho''(x) + \frac{3}{16} \left[\frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)} \right]^2 \varrho(x) = 0. \quad (108)$$

Die Transformation (105) ergibt für das Potential (18)

$$\Phi(x) = U_A + \frac{U_L}{2} + \frac{U_L}{2} x. \quad (109)$$

Wir bringen diesen Ausdruck auf die Form

$$\Phi(x) = \frac{U_L}{2} (k + x), \quad (110)$$

wobei

$$k = 2 \frac{U_A}{U_L} + 1. \quad (111)$$

Da $U_A + U_L = U_E$, besteht also der Zusammenhang

$$\frac{U_E}{U_A} = \frac{k+1}{k-1}, \quad k = \frac{\frac{U_E}{U_A} + 1}{\frac{U_E}{U_A} - 1}. \quad (112)$$

Es ergibt sich

$$\frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)} = \frac{1}{k+x}. \quad (113)$$

Mit Hilfe der Substitution

$$k+x = \xi \quad (114)$$

erhalten wir die Eulersche Differentialgleichung

$$\xi^2 \varrho''(\xi) + \frac{3}{16} \varrho(\xi) = 0. \quad (115)$$

Der Ansatz $\varrho = \xi^\lambda$ führt auf $\lambda_1 = 3/4$ und $\lambda_2 = 1/4$. Jede achsennahe Bahn wird daher mit Konstanten A und B durch

$$\left. \begin{aligned} \frac{r_0(x)}{a} &= \frac{1}{1+x} \{A_0(k+x)^{1/2} + B_0\}, & (-1 < x < 0) \\ \frac{r_1(x)}{a} &= \frac{1}{1-x} \{A_1(k+x)^{1/2} + B_1\}, & (0 < x < +1) \end{aligned} \right\} \quad (116)$$

dargestellt, wobei von nun an die Elektronenbahnen im Intervall $-1 < x < 0$ und im Intervall $0 < x < +1$ durch die Indizes 0 und 1 unterschieden werden. Da in die Differentialgleichung (115) nur das Quadrat von $k + x$ eingeht, ist in der Lösung der Ausdruck $k + x$ durch $|k + x|$ ersetzt zu denken. Nach Gleichung (116) kann sowohl $r_0(x)$ als auch $r_1(x)$ höchstens eine Nullstelle besitzen. Daraus folgt, daß mehrfache Abbildungen ausgeschlossen sind. Da jede Bahn $r(x)$ durch zwei analytische Ausdrücke gegeben ist, muß noch der Zusammenhang zwischen den Konstanten A_0 , B_0 und A_1 , B_1 gesucht werden. In der Ebene $x = 0$ muß gelten

$$r_0(0) = r_1(0)$$

(117)

sowie

$$\left(\frac{dr_0}{dz}\right)_{x=0} = \left(\frac{dr_1}{dz}\right)_{x=0}.$$

(118)

Aus Gleichung (117) in Verbindung mit Gleichung (116) folgt zunächst

$$k^{1/2} A_0 + B_0 = k^{1/2} A_1 + B_1.$$

(119)

Allgemein gilt

$$\frac{dr}{dz} = \frac{dr}{dx} \cdot \frac{dx}{dz}.$$

Da aber

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)_{x=0} = a$$

sowohl für

$$\frac{z}{a} = \frac{x}{1+x}$$

als auch für

$$\frac{z}{a} = \frac{x}{1-x},$$

wird Gleichung (117) erfüllt durch die Bedingung

$$\left(\frac{dr_0}{dx}\right)_{x=0} = \left(\frac{dr_1}{dx}\right)_{x=0}.$$

(120)

Man erhält aus Gleichung (116)

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr_0}{dx} &= -\frac{a}{(1+x)^2} [A_0(k+x)^{1/2} + B_0] + \frac{a}{1+x} A_0 \frac{1}{2} (k+x)^{-1/2}, \\ \frac{dr_1}{dx} &= \frac{a}{(1-x)^2} [A_1(k+x)^{1/2} + B_1] + \frac{a}{1-x} A_1 \frac{1}{2} (k+x)^{-1/2}, \end{aligned} \right\}$$

(121)

so daß durch die Gleichung (120) die Beziehung

$$\left(\frac{1}{2} k^{-1/2} - k^{1/2}\right) A_0 - B_0 = \left(\frac{1}{2} k^{-1/2} + k^{1/2}\right) A_1 + B_1$$

(122)

entsteht. Aus den Gleichungen (119) und (122) folgt

$$A_1 = -(4k-1)A_0 - 4k^{1/2}B_0, \quad B_1 = 4k^{3/2}A_0 + (4k+1)B_0 \quad (123)$$

oder

$$A_0 = (4k+1)A_1 + 4k^{1/2}B_1, \quad B_0 = -4k^{3/2}A_1 - (4k-1)B_1. \quad (124)$$

Zur Herleitung einer Beziehung zwischen den Koordinaten $x = x_0$ und $x = x_1$ einer Objektebene und der zugehörigen Bildebene setzen wir in Gleichung (123) $r_0(x_0) = 0$ und erhalten

$$B_0 = -A_0(k+x_0)^{1/2}. \quad (125)$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{r_1(x)}{a} = \frac{A_0}{1-x} \left\{ \begin{aligned} &[-(4k-1) + 4k^{1/2}(k+x_0)^{1/2}](k+x)^{1/2} \\ &+ 4k^{3/2} - (4k+1)(k+x_0)^{1/2} \end{aligned} \right\}. \quad (126)$$

Es wird $r_1(x_1) = 0$, wenn

$$(k+x_1)^{1/2} = \frac{(4k+1)(k+x_0)^{1/2} - 4k^{3/2}}{4k^{1/2}(k+x_0)^{1/2} - (4k-1)}. \quad (127)$$

Das Quadrieren dieses Ausdruckes führt nach einigen elementaren Zwischenrechnungen zu dem Resultat

$$x_1 = \frac{2k \left[1 - \left(1 + \frac{x_0}{k} \right)^{1/2} \right] + x_0 + \frac{x_0}{8k}}{(4k-1) \left[1 - \left(1 + \frac{x_0}{k} \right)^{1/2} \right] + 2x_0 + \frac{1}{8k}}. \quad (128)$$

Geht man umgekehrt vor und setzt in Gleichung (116) $r_1(x_1) = 0$, so erhält man

$$B_1 = -A_1(k+x_1)^{1/2}. \quad (129)$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{r_0(x)}{a} = \frac{A_1}{1+x} \left\{ \begin{aligned} &[(4k+1) - 4k^{1/2}(k+x_1)^{1/2}](k+x)^{1/2} \\ &- 4k^{3/2} + (4k-1)(k+x_1)^{1/2} \end{aligned} \right\}. \quad (130)$$

Es wird $r_0(x_0) = 0$, wenn

$$(k+x_0)^{1/2} = \frac{4k^{3/2} - (4k-1)(k+x_1)^{1/2}}{4k+1 - 4k^{1/2}(k+x_1)^{1/2}}. \quad (131)$$

Das Quadrieren dieses Ausdruckes führt auf

$$x_0 = - \frac{2k \left[\left(1 + \frac{x_1}{k} \right)^{1/2} - 1 \right] - x_1 + \frac{x_1}{8k}}{(4k+1) \left[\left(1 + \frac{x_1}{k} \right)^{1/2} - 1 \right] - 2x_1 - \frac{1}{8k}}. \quad (132)$$

Um zu einer Abbildungsgleichung für große k zu gelangen, entwickeln wir in Gleichung (128) die Quadratwurzel. Wenn wir im Ergebnis nur Glieder bis $1/k^2$ berücksichtigen, ist die Entwicklung bis $1/k^4$ zu führen. Man erhält dann

$$x_1 = \frac{x_0 + 2x_0^2 - \frac{1}{k}x_0^3 + \frac{5}{8k^2}x_0^4}{1 + 4x_0 + \left(4 - \frac{1}{k} \right)x_0^2 - \left(\frac{2}{k} - \frac{1}{2k^2} \right)x_0^3 + \frac{5}{4k^2}x_0^4}. \quad (133)$$

Da $x_1 = 1/(1 + a/z_1)$, folgt

$$\frac{a}{z_1} = \frac{1 + 3x_0 + \left(2 - \frac{1}{k} \right)x_0^2 - \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} \right)x_0^3 + \frac{5}{8k^2}x_0^4}{x_0 + 2x_0^2 - \frac{1}{k}x_0^3 + \frac{5}{8k^2}x_0^4}. \quad (134)$$

Wir entwickeln nun die in dieser Gleichung auftretenden Potenzen von

$$x_0 = - \frac{1}{1 - \frac{a}{z_0}},$$

berücksichtigen aber, da $|a/z_0| \ll 1$ nur die Glieder bis a/z_0 . Dann erhalten wir

$$\frac{a}{z_1} = \frac{\frac{1}{8k^2} + \left(1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} \right) \frac{a}{z_0}}{1 + \frac{1}{k} + \frac{5}{8k^2} + \left(3 + \frac{3}{k} + \frac{5}{2k^2} \right) \frac{a}{z_0}}. \quad (135)$$

Setzen wir voraus, daß $|a/z_0| < 1/8k^2$ und $|a/z_1| < 1/8k^2$, und vernachlässigen wir alle Glieder, deren Betrag klein ist gegen $1/8k^2$, so folgt schließlich

$$\frac{a}{z_1} - \frac{a}{z_0} = \frac{1}{8k^2}, \quad (136)$$

wodurch die Voraussetzung gerechtfertigt wird. Für $z_1 = +\infty$ oder $z_0 = -\infty$ ergibt sich für die Brennpunktkoordinaten

$$\left| \frac{z_F}{a} \right| = 8k^2. \quad (137)$$

Nach Gleichung (111) ist also

$$\left| \frac{z_F}{a} \right| = 32 \left[\left(\frac{U_A}{U_L} \right)^2 + \left(\frac{U_A}{U_L} \right) + \frac{1}{4} \right]. \quad (138)$$

Die Vergrößerung wird bestimmt durch

$$V = \frac{r_1(x_1)}{r_0(x_0)}. \quad (139)$$

Verwenden wir jene Bahn $r_0(x)$, für welche $B_0 = 0$, so ergibt sich aus den Gleichungen (116) und (123)

$$\frac{r_1(x_1)}{a} = \frac{A_0}{1 - x_1} [4 k^{3/2} - (4 k - 1) (k + x_1)^{1/2}]. \quad (140)$$

Daraus folgt

$$V = \frac{1 + x_0}{1 - x_1} \cdot \frac{4 k^{3/2} - (4 k - 1) (k + x_1)^{1/2}}{(k + x_0)^{1/2}}. \quad (141)$$

Um die Vergrößerung für den Fall zu bestimmen, daß sich die Objektebene nahe der objektseitigen Brennebene befindet, setzen wir

$$\frac{1}{1 - x_1} = \frac{1}{x_1} \cdot \frac{z_1}{a}, \quad (142)$$

so daß mit $x_0 = x_{F_0}$ und $x_1 = 1$ näherungsweise

$$V = \frac{z_1}{a} \cdot \frac{1 + x_{F_0}}{(k + x_{F_0})^{1/2}} [4 k^{3/2} - (4 k - 1) (k + 1)^{1/2}]. \quad (143)$$

Die Berechnung des Öffnungsfehlers erfolgt wieder nach den Gleichungen (75) bis (77). Die Bahn

$$\frac{r_0(x)}{a} = \frac{1}{1 + x} \{A_0 (k + x)^{1/2} + B_0\} \quad (144)$$

schneidet die Achse in der Objektebene $x = x_0$, wenn

$$B_0 = -A_0 (k + x_0)^{1/2}. \quad (145)$$

Aus

$$\left(\frac{dr}{dz}\right)_{x_0} = \left(\frac{dr}{dx}\right)_{x_0} \left(\frac{dx}{dz}\right)_{x_0}$$

und der hier geltenden Beziehung

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)_{x_0} = \frac{1}{a} (1 + x_0)^2 \quad (146)$$

folgt, da der Klammerausdruck in Gleichung (144) für $x = x_0$ verschwindet,

$$\left(\frac{dr_0}{dz}\right)_{x_0} = \frac{A_0}{2} \cdot \frac{1 + x_0}{(k + x_0)^{1/2}}. \quad (147)$$

Setzt man $(dr/dz)_{x_0} = 1$, so ergibt sich aus (143) und (144)

$$r_0(x) = 2 a \frac{(k + x_0)^{1/2}}{1 + x_0} \cdot \frac{1}{1 + x} [(k + x)^{1/2} - (k + x_0)^{1/2}]. \quad (148)$$

Die Berechnung von A_1 und B_1 aus A_0 und B_0 nach Gleichung (123) ergibt

$$r_1(x) = 2a \frac{(k+x_0)^{1/2}}{1+x_0} \cdot \frac{1}{1-x} \left\{ [4k^{1/2}(k+x_0)^{1/2} - (4k-1)](k+x)^{1/2} \right. \\ \left. + 4k^{3/2} - (4k+1)(k+x_0)^{1/2} \right\} \quad (149)$$

Führt man im Integranden der Gleichung (76) mit Hilfe der in Gleichung (105) angegebenen Transformation an Stelle der Integrationsvariablen z die neue Veränderliche x ein und berücksichtigt man die auch in diesem Fall geltende Gleichung (91), so ergibt sich bei Zerlegung des Integrationsbereiches von x_0 bis x_1 in zwei Intervalle von x_0 bis 0 und von 0 bis x_1 zunächst

$$\frac{C_{\delta 0}}{a} + \frac{C_{\delta 1}}{a} = \frac{5}{2} \cdot \frac{(k+x_0)^{3/2}}{(1+x_0)^4} \left\{ \int_{x_0}^0 L_0(x) M_0(x) dx + \int_0^{x_1} L_1(x) M_1(x) dx \right\}, \quad (150)$$

wobei

$$\left. \begin{aligned} L_0(x) &= (k+x)^{-3/2} - 2(1+x)(k+x)^{-5/2} + (1+x)^2(k+x)^{-7/2}, \\ M_0(x) &= [(k+x)^{1/2} - (k+x_0)^{1/2}]^4, \\ L_1(x) &= (k+x)^{-3/2} + 2(1-x)(k+x)^{-5/2} + (1-x)^2(k+x)^{-7/2}, \\ M_1(x) &= \{ [4k^{1/2}(k+x_0)^{1/2} - (4k-1)](k+x)^{1/2} \\ &\quad - (4k+1)(k+x_0)^{1/2} + 4k^{3/2} \}^4. \end{aligned} \right\} \quad (151)$$

Nun ist zu beachten, daß die zweite Ableitung des Potentials (18) an der Stelle $z=0$ unstetig ist. Diese Unstetigkeit liefert in Gleichung (76) einen Beitrag zum Öffnungsfehler, den wir mit $C_{\delta 2}$ bezeichnen wollen. Ersetzen wir nämlich den analytischen Ausdruck (18) in einem sehr schmalen Intervall $z=-\varepsilon$ bis $z=+\varepsilon$ durch einen Potentialverlauf, dessen sämtliche Ableitungen stetig sind, so tritt bei dem Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ in Gleichung (76) das zusätzliche Glied

$$C_{\delta 2} = - \frac{1}{16 \Phi^{1/2}(z_0)} \cdot \frac{1}{4} \Phi'(0) \Phi^{-3/2}(0) r^4(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \Phi'''(z) dz \quad (152)$$

auf. Die Integration liefert

$$C_{\delta 2} = - \frac{1}{16 \Phi^{1/2}(z_0)} \cdot \frac{1}{4} \Phi'(0) \Phi^{-3/2}(0) r^4(0) [\Phi_1''(0) - \Phi_0''(0)], \quad (153)$$

wobei die Striche Ableitungen nach z bedeuten und die Indizes von Φ'' sich auf die beiden Seiten des Feldes beziehen. Nach Berechnung der Funktionen $r(z)$, $\Phi(z)$, $\Phi'(z)$ sowie $\Phi_1''(z)$ und $\Phi_0''(z)$ an der Stelle $z=0$ erhält man

$$\frac{C_{\delta 2}}{a} = \frac{(k+x_0)^{1/2}}{(1+x_0)^4} k^{-3/2} [k^{1/2} - (k+x_0)^{1/2}]^4. \quad (154)$$

Die aus $C_{\delta 0}$, $C_{\delta 1}$ und $C_{\delta 2}$ resultierende Öffnungsfehlerkonstante C_δ ist daher durch

$$\frac{C_\delta}{a} = \frac{5}{2} \cdot \frac{(k + x_0)^{3/2}}{(1 + x_0)^4} \left\{ \frac{2}{5} k^{-3/2} [k^{1/2} - (k + x_0)^{1/2}]^4 + J_0 + J_1 \right\} \quad (155)$$

bestimmt, wobei

$$J_0 = \int_{x_0}^0 L_0(x) M_0(x) dx, \quad J_1 = \int_0^{x_1} L_1(x) M_1(x) dx, \quad (156)$$

mit den in Gleichung (151) angegebenen Funktionen $L(x)$ und $M(x)$.

Zur Berechnung des Farbfehlers verwenden wir die Gleichungen (94) bis (97), wobei ψ sinngemäß durch x zu ersetzen ist. Da nach (111) $k = 1 + 2 U_A/U_L$, wird $\partial k/\partial U_A = 2/U_L$ oder

$$\frac{\partial k}{\partial U_A} = \frac{k - 1}{U_A} \quad (157)$$

und

$$C_F = \frac{k - 1}{\alpha V} \left(\frac{\partial r_2}{\partial k} \right)_{x_1}. \quad (158)$$

Ersetzt man nun in (147) die Ableitung $(dr_0/dz)_{x_0}$ durch α und berechnet man wieder A_1 und B_1 aus A_0 und B_0 , so findet man für $r_1(x)$ einen Ausdruck, der sich von dem in (149) angegebenen nur durch den Faktor α unterscheidet. Da wegen $r_1(x_1) = 0$ in (149) der Ausdruck in der geschweiften Klammer an der Stelle $x = x_1$ verschwinden muß, wird

$$\left(\frac{\partial r_2}{\partial k} \right)_{x_1} = \alpha a \frac{2 (k + x_0)^{1/2}}{(1 + x_0) (1 - x_1)} K, \quad (159)$$

wobei

$$\left. \begin{aligned} K = & [2 k^{-1/2} (k + x_0)^{1/2} + 2 k^{1/2} (k + x_0)^{-1/2} - 4] (k + x_1)^{1/2} \\ & + \frac{1}{2} [4 k^{1/2} (k + x_0)^{1/2} - (4 k - 1)] (k + x_1)^{-1/2} \\ & + 6 k^{1/2} - 4 (k + x_0)^{1/2} - \frac{1}{2} (4 k + 1) (k + x_0)^{-1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (160)$$

Nach Gleichung (158) ergibt sich

$$\frac{C_F}{a} = \frac{k - 1}{V} \cdot \frac{2 (k + x_0)^{1/2}}{(1 + x_1) (1 - x_1)} K. \quad (161)$$

Mit dem in (140) angegebenen Wert der Vergrößerung erhält man schließlich

$$\frac{C_F}{a} = \frac{2 (k - 1) (k + x_0)}{(1 + x_0)^2} \cdot \frac{K}{4 k^{3/2} - (4 k - 1) (k + x_1)^{1/2}}, \quad (162)$$

wobei K der Gleichung (160) zu entnehmen ist. Die folgende Tabelle enthält

Werte der Farbfehlerkonstante für $x_0 = -0,95$. Neben den Linsenparametern k sind wieder die zugehörigen Spannungsverhältnisse U_E/U_A eingetragen. Wie

k	U_E/U_A	C_F/a
1,5	5	-16,4
1,2	11	-15,6
1,1	21	-11,6

bereits im vorhergehenden Abschnitt bemerkt wurde, kommt das negative Vorzeichen der Farbfehlerkonstante durch das negative Vorzeichen der Vergrößerung infolge der Bildumkehr zustande. Die Vorzeichen sind daher zu ändern, wenn die Farbfehlerkonstante durch $\Delta r/|V| = C_F \propto \Delta U_A/U_A$ definiert wird.

Résumé

Des solutions exactes de l'équation différentielle des trajectoires électroniques proches de l'axe sont données pour des potentiels le long de l'axe déterminés de champs électrostatiques présentant une symétrie de rotation, lesquels potentiels ont une configuration analogue à celle des lentilles cylindriques. Des expressions pour les caractéristiques optiques les plus importantes de ces lentilles en sont dérivées.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] H. BRUCK und L. ROMANI, *Cah. Phys.* 24, 15 (1944).
- [2] J. DOSSE, *Z. Phys.* 117, 722 (1941).
- [3] E. G. RAMBERG, *J. appl. Phys.* 13, 582 (1942).
- [4] W. GLASER, *Z. Phys.* 117, 285 (1941).
- [5] R. G. E. HUTTER, *J. appl. Phys.* 16, 678 (1945).
- [6] R. REBSCH, *Ann. Phys.* 31, 551 (1938).
- [7] A. A. RUSTERHOLZ, *Grundzüge der theoretischen Elektronenoptik* (Birkhäuser, Basel 1950).
- [8] R. RÜDENBERG, *J. Franklin Inst.* 246, 322, 377 (1948).
- [9] V. K. ZWORYKIN, *Electron Optics and the Electron Microscope* (John Wiley & Sons, New York 1946).
- [10] S. BERTRAM, *Proc. Inst. Radio Eng.* 28, 418 (1940).
- [11] G. N. PLASS, *J. appl. Phys.* 13, 49, 524 (1942).
- [12] W. GLASER, *Ann. Phys.* (im Druck).
- [13] E. JAHNKE und F. EMDE, *Tafeln höherer Funktionen* (Teubner, Leipzig 1948).

Eingegangen: 8. 6. 1950.)

Der Wärmeaustausch durch Strahlung an fliegenden Körpern

Von WERNER SPILLMANN, Luzern¹⁾

1. Einleitung

Der Wärmeaustausch fliegender Körper jeder Art mit ihrer Umwelt erfolgt teilweise durch Strahlung. Als strahlende oder strahlungsempfangende Gegen-«fläche» sind nicht nur Sonne und Erde, sondern auch der unendliche Raum und die Atmosphäre am Energieaustausch beteiligt.

Wenn auch in erster Näherung die Atmosphäre als diatherman betrachtet werden kann, so ist doch für einige praktische Fälle nur mit der Annahme von strahlenden Gasschichten eine genaue Berechnung möglich. Dies kann etwa der Fall sein für die Wärmeabstrahlung einer kleinen Jagdflugzeugkabine durch das große transparente Kabinendach oder für Flugkörper, die die Ionosphäre erreichen, wo die neuere Forschung das Vorhandensein von Schichten mit besonders ausgeprägter Strahlungswirkung festgestellt hat [1]²⁾.

In der wesentlich veränderten Umwelt extremer Höhen kann die Strahlung allein ausschlaggebend sein, wenn der Wärmeübergang zwischen Flugkörper und Atmosphäre schwach wird, etwa am schwebenden Körper (Ballone) oder infolge sehr geringer Dichte. Durch hohe Fluggeschwindigkeiten wird der Strahlungsaustausch durch erhöhte Temperatur an Staupunkten und in der Grenzschicht infolge adiabatischer Verdichtung beeinflusst. Die damit erhöhte Oberflächentemperatur läßt die Abstrahlung beträchtliche Werte annehmen.

2. Bezeichnungen

J	Strahlungsintensität, Solarkonstante	kcal/m ² h
Q	Übertragene Wärmemenge	kcal/h
q	Auf die Flächeneinheit entfallende Wärmemenge	kcal/m ² h
H	Definierte Höhe über Meer	km
h	Variable Höhe über Meer	km
T	Absolute Temperaturen	°K
v	Fluggeschwindigkeit	m/s
c_s	Strahlungszahl des schwarzen Körpers	= 4,96 kcal/m ² h
ϵ	Absorptionszahl und Emissionsverhältnis	

¹⁾ Eidg. Flugzeugwerk Emmen.

²⁾ Die Ziffern in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis auf S. 484.

- k Absorptionskoeffizienten oder logarithmisches Dekrement der Gasstrahlung
- K Angenäherte Absorptionskoeffizienten
- f Fläche m²
- c_p Spezifische Wärme kcal/kg°C
- r $\left. \begin{matrix} r \\ s \\ \varphi \\ \psi \end{matrix} \right\}$ Polarkoordinaten des Raumes

Indizes

- 1 Bezogen auf den Flugkörper
- 2 Bezogen auf die strahlende Schicht
- g Für die Gasstrahlung
- r Für die Abstrahlung des Flugzeuges
- E Für die Erdstrahlung
- e Für die reflektierte Erdstrahlung
- t Für den Wärmeübergang
- W Für die Wolkenschicht
- R Für den Strahlungsverlust (Wärmeverlust)

3. Gasstrahlung der Atmosphäre

Hat ein homogener Gasraum für die Wellenlänge λ einen unveränderlichen Absorptionskoeffizienten k , so ist die Intensitätsänderung eines monochromatischen Strahlers $J_{\lambda\infty}$ auf dem Wegelement ds

$$dJ_{\lambda} = - J_{\lambda\infty}(h) \, k(h) \, ds. \tag{1}$$

Die Integration ergibt für die Strahlungsintensität in der Höhe h

$$J_{\lambda}(h) = J_{\lambda\infty} \, e^{-k(h) \, s}. \tag{2}$$

Der Absorptionskoeffizient $k(h)$ oder direkt das Absorptionsverhältnis $\varepsilon(h)$ lassen sich aus den Intensitätsmessungen der Sonnenstrahlung bestimmen. Die Strahlungsintensitäten der Sonne sind in Figur 1 nach Angaben des Lichtklimatischen Observatoriums von Prof. GÖTZ in Arosa aufgezeichnet worden, wobei die Asymptoten der Kurven die extraterrestrische Strahlung oder Solar-konstante J_{∞} darstellen. Diese Messungen erfassen die Gesamtstrahlung und gelten für das Sonnenspektrum. Da die Absorption für verschiedene Wellenlängen verschieden ist, müßten sowohl die Messungen nach GÖTZ wie auch die folgenden Berechnungen für jede Wellenlänge ausgeführt werden. Damit aber eine praktisch verwendbare Rechnungsmethode aufgestellt werden kann, wurde

hier die Annahme getroffen, daß sich alle beteiligten Körper, Flächen und Schichten wie «graue» Körper verhalten, also keine spektrale Abhängigkeit zu

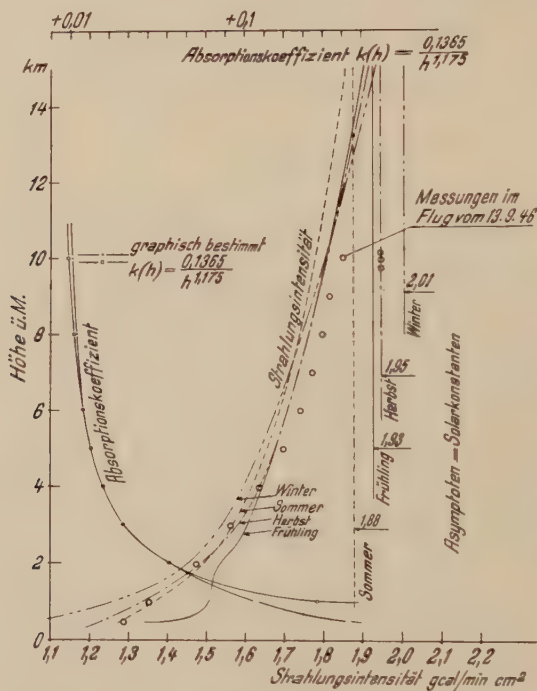


Fig. 1

Strahlungsintensität nach Messungen von Prof. Götz, Lichtklimatisches Observatorium Arosa, und daraus bestimmter Absorptionskoeffizient. Die Einzelmessungen (O) wurden vom Flugzeug aus mit ungeschütztem Gesamtstrahlungs-pyrometer aufgenommen.

berücksichtigen sei. Das Absorptionsverhältnis in der Höhe H folgt aus dem Verlauf der Intensitätskurven und ist

$$\varepsilon_H = \frac{J_\infty - J_H}{J_H}$$

oder für eine infinitesimale Schicht dh aus (1)

$$\varepsilon(h) = \frac{dJ}{J(h)} = -k(h) ds. \quad (3)$$

Das Ergebnis dieser Berechnung ist ebenfalls in Figur 1 eingetragen.

Mit der geometrischen Beziehung $ds = -dh/\cos \varphi$ (Figur 2) lautet die Differentialgleichung (1)

$$dJ = J(h) k(h) \frac{dh}{\cos \varphi}. \quad (4)$$

Wiederum für die Sonne als Strahlungsquelle wird daraus:

$$\frac{J(h)}{J_{\infty}} = e^{\frac{1}{\cos \varphi} \int_h^{\infty} k(h) dh} \quad (5)$$

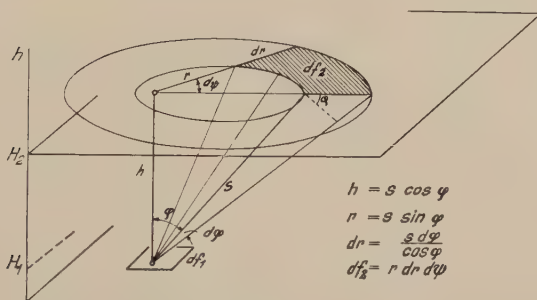


Fig. 2
Gestalt des Gasraumes.

Zur analytischen Behandlung des Problems kann zum Beispiel die Sommerkurve mit Gleichung (5) recht genau durch die Interpolationsformel

$$J = \text{const} e^{\int_h^{\infty} k(h) dh} = 2,99 e^{-0,78h - 0,175} \quad (6)$$

dargestellt werden.

Zwischen $h = 1000$ und $H = 15000$ m Flughöhe ist der Fehler der Formel unter 1%. Der für die Rechnung verwendbare Absorptionskoeffizient $k(h)$ wird nun:

$$k(h) = \frac{d}{dh} \int_h^{\infty} k(h) dh = 0,1365 h^{-1,175}. \quad (7)$$

4. Die Strahlung atmosphärischer Schichten

4. 1. Strahlung einer Einzelschicht

Wird an Stelle des punktförmigen Strahlers (Sonne) eine emittierende Schicht in der Höhe H_2 betrachtet, so wird die Einstrahlung des Flächenelementes df_2 dieser Schicht in der Richtung φ auf das empfangende Flächenelement df_1 nach Figur 2

$$dQ_{21} = \varepsilon_1 \varepsilon_2 c_s \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 f(s, \varphi) df_2 df_1. \quad (8)$$

Die Funktion f , der Formfaktor, berücksichtigt die geometrischen Verhältnisse und lautet allgemein:

$$f(s, \varphi) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{s^2}$$

und für die Verhältnisse der Figur 2

$$f = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\cos^2 \varphi}{s^2}.$$

Berücksichtigt man noch die geometrische Gestalt des Flächenelementes $df_2 = r dr d\varphi$, so lautet der Formfaktor:

$$f(s, \varphi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = \pi \quad (9)$$

und wird damit identisch mit der Strahlung in den kugeligen Halbraum.

Eine einzelne Schicht, die in ein diathermanes Medium eingebettet ist, strahlt also auf f_1 :

$$Q_{21} = \varepsilon_1 \varepsilon_2 c_s \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 df_1, \quad (10)$$

wobei noch angenommen wurde, daß sich die Emissionsverhältnisse richtungsunabhängig, also nach dem Lambertschen Gesetz, verhalten.

4. 2. Strahlung von mehreren Schichten

Befindet sich das empfangende Flächenelement wiederum in der Flughöhe H_1 und soll die Strahlung aller über der Flughöhe liegenden Schichten erfaßt werden, so sind das Emissionsverhältnis ε_2 und die Temperatur der Schichten T_2 höhenabhängig einzusetzen, und (10) lautet dann:

$$Q_{\infty 1} = \varepsilon_1 c_s df_1 \int_{H_1}^{\infty} \varepsilon(h) \left(\frac{T_2(h)}{100} \right)^4 dh. \quad (11)$$

Wird jedoch von jeder Schicht eine Eigenstrahlung vorausgesetzt, so ist auch sofort – nach dem Kirchhoffschen Satz – eine entsprechende Absorption zu berücksichtigen.

5. Strahlung und Absorption in der geschichteten Atmosphäre

Aus der Beziehung (5) wird klar, daß die Strahlung jeder Schicht mit dem Faktor

$$e^{\frac{1}{\cos \varphi} \int k(h) dh}$$

behaftet sein muß, um der Absorption Rechnung zu tragen.

Die Strahlung der Summe aller Schichten der Atmosphäre ist dann

$$Q_{\infty 1} = \varepsilon_1 c_s df_1 \int_{H_1}^{H=\infty} \varepsilon(h) e^{\frac{1}{\cos \varphi} \int_{H_1}^{\infty} k(h) dh} \left(\frac{T_2(h)}{100} \right)^4 dh. \quad (12)$$

Zur Erfassung des Integrals muß auf die Strahlung einer einzelnen Schicht zurückgegriffen werden. Mit Verwendung des Absorptionsverhältnisses der infinitesimalen Luftschicht wird mit (9) und (12):

$$Q_{21} = \frac{\varepsilon_1 c_s}{\pi} df_1 \int_0^{\pi/2} k(h) \left(\frac{T(h)}{100} \right)^4 \sin \varphi \cos \varphi e^{\frac{1}{\cos \varphi} \int_{H_1}^{\infty} k(h) dh} d\varphi \int_0^{2\pi} d\psi \int_{H_1}^{\infty} dh. \quad (13)$$

Die Integrale über den Winkeln φ und ψ berücksichtigen die Gestalt des Raumes und ergeben den Formfaktor Φ des absorbierenden Gasraumes.

Der Versuch, den Absorptionskoeffizienten nach der Beerschen Beziehung

$$k_{p,\lambda} = k_{p_0,\lambda} \frac{p}{p_0}$$

zu bestimmen, führt nicht zum Ziele, auch dann nicht, wenn an Stelle des Druckes die Dichte oder der Partialdruck des gesättigten Wasserdampfes verwendet wird.

5. 1. Formfaktor Φ des absorbierenden Gasraumes

Betrachtet man die Strahlung einer Schicht in der Höhe H_2 auf das Objekt in H_1 , so wird aus der Näherung (6)

$$K = 0,78 (H_1^{-0,175} - H_2^{-0,175}) \quad (14)$$

und das Doppelintegral Φ bekommt die an sich lösbare Form

$$\Phi = \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \cos \varphi e^{-\frac{K}{\cos \varphi}} d\varphi \int_0^{2\pi} d\psi. \quad (15)$$

Mit Rücksicht auf die spätere Integration zwischen H_1 und H_2 wird jedoch Φ mit Vorteil wieder durch eine Näherung bestimmt. Eine solche ist:

$$\Phi = \frac{1}{2} (0,189)^{k(h)} \int d\psi. \quad (16)$$

Endgültig konnte daraus für den Formfaktor Φ im Bereich $1 < H_2 < 30$ km die Beziehung

$$\Phi = \pi \left(\frac{H_1}{H_2} \right)^{0,15} \quad (17)$$

als hinreichend einfache Interpolation bestimmt werden¹⁾. Dieser Formfaktor ist in Figur 3 mit Gleichung (16) aufgezeichnet, woraus die Qualität der Näherung ersichtlich ist.

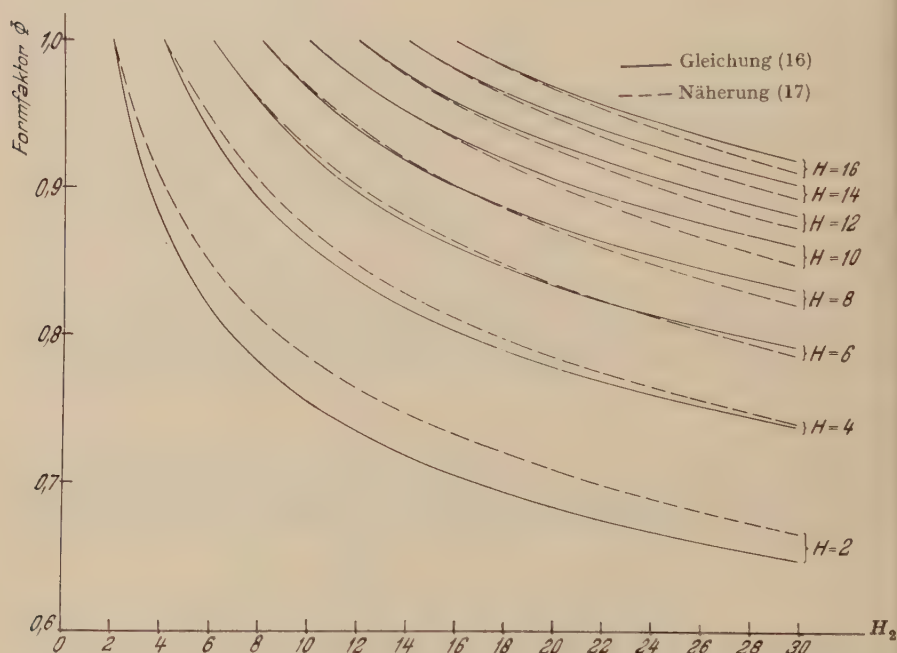


Fig. 3

Der Formfaktor des absorbierenden Gasraumes zwischen der Höhe H_1 und H_2 .

5. 2. Gasstrahlung der Atmosphäre

Die graue Gesamteinstrahlung läßt sich damit etwa auf graphischem Wege berechnen. Durch Einsetzen von (7) und (17) wird aus (13) die auf das Flächenelement $df_1 = 1 \text{ m}^2$ entfallende Strahlung aus der Höhe $H_2 = h$

$$q_1 = 0,1365 \varepsilon_1 c_s \int_{H_1}^h \left(\frac{H_1}{h} \right)^{0,15} h^{-1,175} \left(\frac{T_2(h)}{100} \right)^4 dh. \quad (18)$$

Die absolute Temperatur $T_2(h)$ der strahlenden Schichten kann entsprechend der Normalatmosphäre (CINA) eingeführt werden:

¹⁾ Die Berechnung der Näherungsgleichungen verdanke ich Herrn Dipl.-Phys. E. MOOSER Luzern.

$$0 < h < 11 \text{ km} \quad T_2(h) = 288 - 6,5 h$$

$$11 < h < 30 \text{ km} \quad T_2(h) = 216,5^\circ \text{K}$$

$$30 < h < \infty \quad T_2(h) = 0^\circ \text{K}$$

Die Annahme, daß die Temperatur über der Höhe von 30 km den absoluten Nullpunkt erreicht, trifft nach den neuesten Feststellungen keineswegs zu. Im Gegenteil muß man aus Messungen mit Raumraketen und aus Gleichgewichtsbedingungen in gewissen Höhen sehr hohe kinetische Gastemperaturen voraussetzen [1].

Ferner wird auch das Vorhandensein von Ozonschichten in der Ionosphäre festgestellt, womit sich für die Strahlung Verhältnisse ergeben, die nicht mehr unter Voraussetzungen von grauen Strahlern berechnet werden können.

Daß nun trotzdem für die praktischen Berechnungen der vorliegenden Art die Temperatur $T_{(30)} = 0$ gesetzt werden darf, führt nur darum zu einem geringen Fehler, weil in dieser Höhe die Emission infolge der geringen Gasdichte sehr klein wird. Mit gleichem Ergebnis könnte auch die wirkliche Temperatur, dann aber der Absorptionskoeffizient ~ 0 , gesetzt werden.

Mit dem Temperaturverlauf in der Normalatmosphäre entsteht die Berechnungsformel für die Gasstrahlung

$$q_g = 0,1365 \varepsilon_1 c_s \left[\int_{H_1}^{11} \left(\frac{H_1}{h} \right)^{0,15} h^{-1,175} \left(\frac{288 - 6,5 h}{100} \right)^4 dh + \int_{11}^{30} \left(\frac{H_1}{h} \right)^{0,15} h^{-1,175} \left(\frac{216,5}{100} \right)^4 dh \right] \quad (19)$$

6. Berechnung der Strahlungsanteile

6. 1. Strahlung von Wolkenschichten

Wird eine ununterbrochene Wolkenschicht als unendlich ausgedehnte Ebene betrachtet und ihr das Emissionsverhältnis ε_W und die ihrer Höhe H_W entsprechende Temperatur T_W zugeschrieben, so wird ihre Einstrahlung auf df_1 ohne Berücksichtigung der Absorption in der klaren Schicht

$$q_W = \varepsilon_1 \varepsilon_W c_s \left(\frac{T_W}{100} \right)^4 \left(\frac{H}{H_W} \right)^{0,15} = \varepsilon_1 \varepsilon_W c_s \left(\frac{288 + 6,5 H_W}{100} \right)^4 \left(\frac{H}{H_W} \right)^{0,15} \quad (20)$$

Für das Emissionsverhältnis der Wolken wurde in Ermangelung zutreffender Werte für die numerischen Berechnungen $\varepsilon_W = 0,565$ eingesetzt, also ein Wert bedeutend kleiner als zum Beispiel derjenige für Eis und Wasser: 0,96 [2].

6. 2. *Erðstrahlung*

Wird die Erdoberfläche wiederum als eine unendliche Ebene betrachtet¹⁾ und ihr ein Emissionsverhältnis von ε_E und die Temperatur T_E zugeschrieben, so ist ihre Abstrahlung auf die Fläche df_1 des Flugzeuges

$$q_E = \varepsilon_1 \varepsilon_E c_s \left(\frac{T_E}{100} \right)^4. \quad (21)$$

Diese Strahlung trifft nur die der Erde zugewendete Seite des fliegenden Körpers und fällt für die Einstrahlung in nach oben verglaste Kabinen außer Betracht. Für das Emissionsverhältnis wurde $\varepsilon_E = 0,85$ gesetzt.

6. 3. *Reflektierte Erðstrahlung*

Für den häufigen Fall, daß sich das Flugzeug zwischen der Erdoberfläche und einer Wolkenschicht befindet, wird ein bestimmter Betrag der Erdstrahlung, die die Wolkenschicht trifft, reflektiert und erreicht ebenfalls das Flugzeug (Flächenelement $df_1 - 1$). Wird für die Wolken ein Reflexionsvermögen r_W angenommen, so ist der Betrag der reflektierten Erdstrahlung

$$q_E = \varepsilon_1 \varepsilon_E r_W c_s \left(\frac{T_E}{100} \right)^4. \quad (22)$$

Sind Reflexionszahlen von $r_W = 0,3$ für Wolken zutreffend, so ergeben sich Wärmebeträge, die oft selbst bei hoch liegenden Wolken und schwacher Erdstrahlung ins Gewicht fallen.

6. 4. *Strahlung des Flugkörpers*

Die von jedem Flächenelement $df_1 = 1$ abgestrahlte Wärme beträgt

$$q_r = \varepsilon_1 c_s \left(\frac{T_1}{100} \right)^4. \quad (23)$$

Darin sind das Emissionsverhältnis ε_1 und die Temperatur T_1 für die Oberfläche des Flugzeugkörpers einzusetzen. In den meisten Fällen ist die Temperatur nicht bekannt und muß aus der Berechnung für den gesamten Wärmeaustausch einschließlich Wärmeleitung, Flugzeugheizung usw. bestimmt werden. Für den speziellen Fall der über eine große Fläche verglasten, transparenten Flugzeugkabinen ist für die Abstrahlung die Kabinentemperatur einzusetzen. Man berechnet auf diese Weise die Abstrahlung der Kabine, wobei auch die Absorption und Reflexion am Glasdach der Kabine in der Rechnung leicht berücksichtigt werden können.

¹⁾ Beziehungen zur Berücksichtigung der Erdkrümmung siehe [3].

7. Wärmebilanz der Strahlung

Im allgemeinen und stationären Fall eines Fluges in konstanter Höhe muß die Summe aller aus- und eingestrahltten Wärmemengen verschwinden, was bedeutet, daß das Flugzeug die einmal angenommene Temperatur nicht mehr ändert.

Bestimmt man noch auf bekanntem Wege den Wärmeübergang q_t und die dem Flugzeug im Innern zugeführte Wärme q_i (Wärmeabgabe der Besatzung, elektrische Verlustleistung und Heizung), so lautet die vollständige Wärmebilanz

$$q_r + q_t = q_s + q_g + q_E + q_i + q_W + q_e, \quad (24)$$

wobei q_s die durch die Sonnenstrahlung einfallenden Wärmebeträge und q_g die Einstrahlungen der Atmosphäre bedeuten.

Die Größe des Strahlungsaustausches allein kann überprüft werden, wenn vorerst von der Wärmeleitung und innern Wärmemengen abgesehen wird und nur der Strahlungsverlust

$$q_R = q_r - q_s - q_g - q_E - q_W - q_e \quad (25)$$

betrachtet wird, wobei für die Temperatur des Flugkörpers meist gut zutreffende Annahmen leicht gemacht werden können.

7. 1. Wärmeverlust eines Flugzeuges in klarer Atmosphäre

Es sei angenommen, ein Flugzeug mit allseitig einheitlicher Oberfläche, etwa ein Verkehrsflugzeug mit kleinen Fenstern, deren Absorptionsverhältnis $\varepsilon_1 = 0,4$ betrage, fliege in der Höhe H_1 bei wolkenlosem Himmel mit der Geschwindigkeit $V = 360$ km/h. Es kann dann etwa angenommen werden, daß das Flugzeug eine Oberflächentemperatur T_1 habe, welche mit der Temperatur der längs angeströmten Platte im zweiatomigen Gas [4] identisch ist, also

$$T_1 = T_H + \frac{A}{2g c_p} 0,85 V^2 = T_H + \frac{V^2}{2 \cdot 400}.$$

Es wird also in der Grenzschicht eine Temperaturerhöhung angenommen, die 85% der adiabatischen Stautemperatur beträgt. Der Strahlungsaustausch wird damit:

$$q_R = q_r - (q_g + q_E),$$

und mit (19):

$$q_R = \varepsilon_1 c_s \left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - 0,1365 \varepsilon_1 c_s \left[\int_{\bar{H}}^{11} f(h) + \int_{11}^{30} f(h) \right] - \varepsilon_1 c_{11} c_s \left(\frac{T_E}{100} \right)^4. \quad (26)$$

Die Kurven der Figur 4 stellen diese Gleichung für drei Grenzbedingungen dar. Aus dem Unterschied der Kurven 1 und 2 sind die von der Erde eingestrahltten Wärmemengen erkennbar. Ihre Vernachlässigung [5], [6] kann tatsächlich zu merkbaren Fehlern in der Berechnung des Wärmebedarfs von Flugzeugheizungen führen.

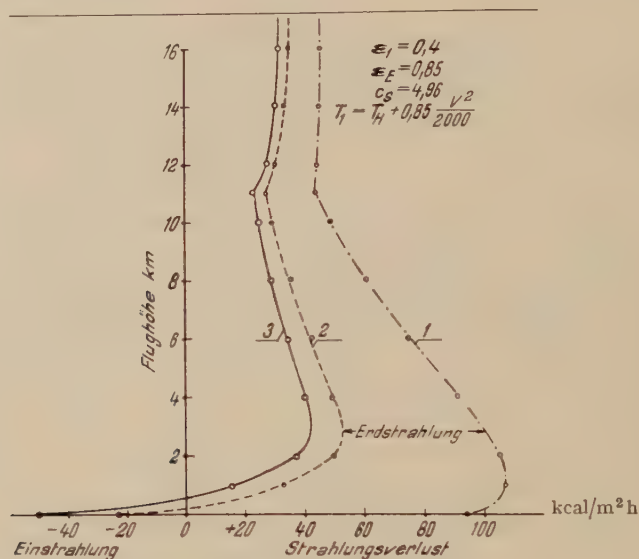


Fig. 4

Strahlungsaustausch eines Flugzeuges. Fluggeschwindigkeit 360 km/h. Temperatur der Flugzeugaußenhaut T_1 , Emissionsverhältnis der Flugzeugoberfläche $\epsilon_1 = 0,4$.

Kurve 1 ——— Flug nahe über Wolken, klarer Himmel, ohne Erdstrahlung.

Kurve 2 - - - - - Flug in klarer Atmosphäre, mit Einstrahlung der Erdoberfläche, deren Temperatur 15°C beträgt.

Kurve 3 Flug in klarer Atmosphäre bei hoher Bodentemperatur von 30°C (Flug über Wüstengebiet).

7. 2. Strahlungsverlust einer Jagdflugzeugkabine

Ein Jagdflugzeug, Einsitzer, besitze eine gut isolierte Kabine von etwa 1 m^3 Rauminhalt, welche von einer Glaskuppel überdacht ist, deren Projektion einen Flächeninhalt von $1,0\text{ m}^2$ habe. Die Klimatisierung der Druckkabine erlaubt im Innern eine Temperatur von $T_K = 16^\circ\text{C}$ aufrechtzuerhalten. Der Strahlungsaustausch der Kabine wird für ein doppelwandiges Glasdach, von dem man annehmen kann, es sei vollkommen isoliert, von der Fluggeschwindigkeit unabhängig.

Damit ist der Strahlungsverlust (bzw. Gewinn am Tage)

$$q_R = q_r - (q_g + q_s).$$

Im Nachtflug ist $q_s = 0$ zu setzen.

Aus den Intensitätskurven der Sonnenstrahlung folgt die einfallende Wärmemenge q_s (Kurve 1 in Figur 5).

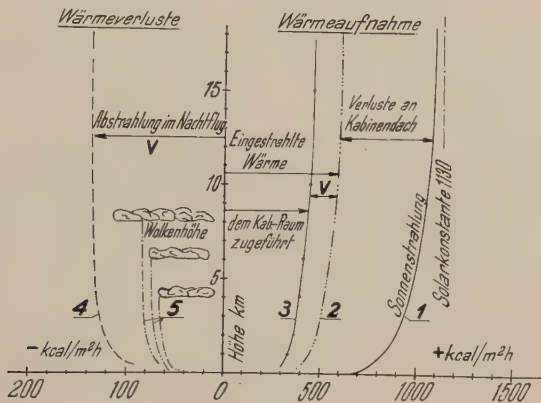


Fig. 5

Wärmeaustausch durch Strahlung für eine Flugzeugkabine mit nach dem Zenith gerichtetem transparentem Glasdach von 1 m² Fläche.

Die Untersuchung des doppeltverglasten und stark gekrümmten Kabinendaches aus Plexiglas ergab an Verlusten

Absorption	0,015
Totalreflexion	0,300
Reflexionsvermögen	0,040
Spiegelungen durch nicht senkrechten Einfall . . .	0,100
	<hr/>
	0,455

Von q_s werden also nur ca. 55% dem Kabineninnern zugeführt (Kurve 2). Für das Kabineninnere beträgt dann der Wärmeverlust (Kurve 4 und Differenz zwischen 2 und 3)

$$q_r = \varepsilon_1 c_s \left(\frac{T_K}{100} \right)^4 - 0,1365 \varepsilon_1 c_s \left[\int f(h) \right]. \tag{27}$$

Um diesen Betrag vermindert sich die eingestrahlte Sonnenwärme, womit dann die Kurve 3 für die der Kabine im Tagflug zugeführte Wärme erreicht ist.

Das Beispiel zeigt sehr anschaulich, daß in großer Flughöhe einer solchen Kabine im Nachtflug ca. 120 kcal/m²h durch Beheizung zugeführt werden müssen, während in derselben Höhe am Tage etwa 400–500 kcal/m²h abzuführen sind. Die Wirkung der Strahlung wird hier besonders deutlich, einmal weil die Kabine vom Einfluß der Wärmeleitung frei gehalten werden kann (Isolation $q_t = 0$) und dann weil der Betrag der Sonnenstrahlung allein den Übergang von der Heizung nachts zur Kühlung bei Tag erzwingt.

Die Wärmeverluste dieser Kabine sind im Flug unter Wolken aus

$$q_R = q_r - q_g - q_W - q_e \quad (28)$$

zu berechnen, worin an Einstrahlungen auf die Kabine berücksichtigt sind:

q_g = die von der zwischen Flugzeug und Wolken gelegenen Luftschicht gestrahlte Energie,

q_W = die Strahlung der Wolkenschicht,

q_e = die von der Wolke an die Kabine reflektierte Erdstrahlung.

Eine direkte Erdstrahlung tritt nicht in die nach oben transparente Kabine, und ein wesentlicher Wärmeübergang ist durch Isolation unterbunden.

Mit den vorstehend angegebenen Annahmen für die einzelnen Werte erhält man Wärmeverluste, wie sie die Kurve 5 in Figur 5 wiedergibt. Für die drei gewählten Wolkenhöhen 4, 6 und 8 km erhält man nicht stark verschiedene Strahlungsverluste, die im Mittel etwa 55% der Abstrahlung im Nachtflug bei klarer Atmosphäre betragen.

7. 3. Anwendungen auf die Heizungstechnik

Häufig wird bei der Berechnung des Wärmebedarfes beispielsweise von Treibhäusern, Glasdächern, Schwimmbädern und künstlichen Eisfeldern für die Strahlung die «Gegentemperatur» bei klarer Atmosphäre $T_0 = 0^\circ \text{K}$ gesetzt, entsprechend der einfachen Formel:

$$q = c_s \varepsilon_1 \varepsilon_2 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_0}{100} \right)^4 \right]. \quad (29)$$

Welcher Fehler durch Weglassen der Gasstrahlung der Atmosphäre entsteht, zeigt folgender Fall:

Ein Eisfeld auf Meereshöhe befinde sich auf der Temperatur 0°C . Diese Temperatur habe auch eine kalte Bodenschicht der Atmosphäre bis in die Höhe von ca. 500 m, darüber verlaufe die Temperatur nach der Normalatmosphäre, ein Fall, wie er etwa im Vorfrühling auftreten mag. Mit dem Emissionsvermögen von Eis [2] $\varepsilon_1 = 0,98$ und einem solchen des diathermanen Raumes von $\varepsilon_2 = 1$ erhält man nach Gleichung (29) eine Abstrahlung von $270 \text{ kcal/m}^2\text{h}$. Rechnet man dagegen nach Gleichung (27) den Wert der Gasstrahlung zwischen $H = 500 \text{ m}$ und 30 km aus und erhält dafür den Wert von $410 \text{ kcal/m}^2\text{h}$, so wird der Eisfläche die Wärmemenge von $140 \text{ kcal/m}^2\text{h}$ zugeführt.

In diesem und ähnlichen Fällen dürfte also nicht mit einer diathermanen Atmosphäre gerechnet werden. Dagegen scheint die Verwendung der Gleichung (29) für das Hochgebirge eher zulässig zu sein, wie der sehr interessante Verlauf der Schnee- und Lufttemperatur über der Tageszeit erkennen läßt.

Figur 6 zeigt den typischen Verlauf für die Luft- und Schneetemperatur in 2540 m ü.M. Die starke Abstrahlung bei Nacht läßt die Oberflächentemperatur der Schneedecke weit unter die Lufttemperatur sinken. Für den Fall im dargestellten Diagramm stellt sich zwischen 24 Uhr bis vor Sonnenaufgang ein Temperaturunterschied von 12°C ein. Die geringen Schwankungen lassen auf

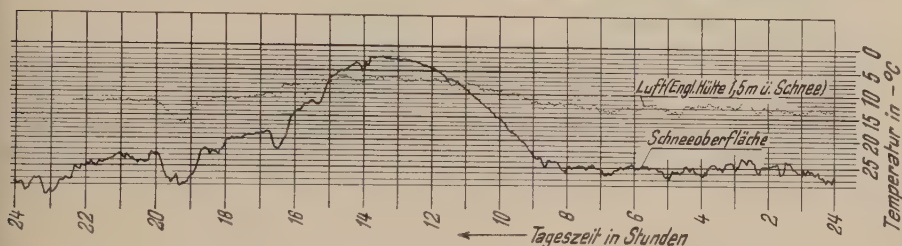


Fig. 6

Temperaturen der Schneeoberfläche und der Luft in 2540 m ü.M., Messungen von DE QUERVAIN auf Weißfluhjoch vom 2. Februar 1950 [7].

kleine Unterschiede in der Windgeschwindigkeit oder auf Windstille schließen. Weil nun oberhalb der Meereshöhe des Versuchsfeldes besonders für die kalte trockene Winteratmosphäre nur mit geringer Absorption zu rechnen ist, darf man erwarten, mit $T_0 = 0^\circ \text{K}$ aus Gleichung (29) ein brauchbares Resultat zu erhalten.

Man hat noch die Wärmeübertragung q_t von der wärmeren Luftschicht an die Schneefläche und die der Schneeschicht zufließende Erdwärme zu berücksichtigen. DE QUERVAIN berechnet den Wärmestrom q_E^* vom Boden in die Schneedecke zu ca. 1 kcal/m²h für den Monat Februar eines früheren Jahres [7]. Rechnet man für den Wärmeübergang mit einer Windgeschwindigkeit $w = 2,5 \text{ m/s}$ die Übergangszahl an der ebenen Wand (Hütte I):

$$\alpha = 5 + 3,4 w = 13,5 \text{ kcal/m}^2\text{h } ^\circ\text{C},$$

so kann aus der Wärmebilanz

$$q_r = q_E^* + q_t$$

oder

$$c_s \varepsilon_1 \varepsilon_2 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_0}{100} \right)^4 \right] = q_E^* + \alpha (T_1 - T_{\text{Luft}})$$

die Temperatur des Strahlungsempfängers berechnet werden. Setzt man für die Schneefläche $\varepsilon_1 = 0,96$ und $T_1 = -25^\circ\text{C}$ (Figur 6) und für die Atmosphäre $\varepsilon_2 = 1$, so folgt aus der Gleichung die Temperatur $T_0 = 1,4^\circ\text{K}$.

Man erhält also nahezu die Temperatur des extraterrestrischen Raumes, womit die Zuständigkeit der Gleichung (29) nachgewiesen wäre. Willkürlich ist dabei nur die Annahme der Luftgeschwindigkeit, mit deren Größe etwa eine schwache Thermik entlang der Schneefläche berücksichtigt sein mag.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] G. GRIMMINGER, *Analysis of Temperature, Pressure and Density of the Atmosphere Extending to Extreme Altitudes*, U. S. Airforce Proj. Rand Rep. R 105, Rand Corp. Nov. 1 (1948).
- [2] FR. BOSNJAKOVIC, *Wärmelehre und Wärmewirtschaft*, Bd. 9 (Steinkopf, Dresden 1944).
- [3] *Meteorologisches Taschenbuch*, Bd. 4.
- [4] E. POHLHAUSEN, *Z. angew. Math. Mech.* **1**, 115 (1921).
- [5] H. M. J. KITTELSEN, *Pressure Cabines and Temperature*, Aircraft Eng., Nov. 1941, S. 303.
- [6] P. J. BATEMAN, *Cabine Cooling in High Speed Flight*, R and M 2329, Aug. 1946.
- [7] M. DE QUERVAIN, *Zur Temperaturdynamik der Schneedecke*, Eidg. Inst. Schnee- und Lawinenforsch. Davos, Interner Bericht Nr. 25 (1946).

Summary

To determine the amount of radiation in the heat transfer of flying bodies the absorption of the atmospheric layers is calculated by making use of the known solar radiation. The resulting approximation is applied to practical problems especially for pressurized cabins of fighter aircraft.

(Eingegangen: 6. 4. 1951.)

Kurze Mitteilungen – Brief Reports – Communications brèves

Höhenkarte des Fehlerintegrals

VON THEODOR LAIBLE, Zürich

Bei nichtstationärer Wärmeleitung in geschichteten Medien erhält man Lösungen, die das Fehlerintegral mit komplexem Argument enthalten. Dasselbe ist der Fall bei der Untersuchung von Kurzschlußvorgängen für Synchronmaschinen mit massiven Polen. Um einen Überblick über den Verlauf solcher Lösungen zu ermöglichen, sah ich mich veranlaßt, eine Höhenkarte des Fehlerintegrals zu entwerfen, die vielleicht auch bei anderen Problemen von Nutzen sein kann.

Figur 1 zeigt den generellen Charakter der Funktion im ersten Quadranten. Die übrigen Quadranten ergeben sich durch Spiegelung an den Achsen. Figur 2 zeigt etwas genauer das Gebiet, das für die obenerwähnten Anwendungen am wichtigsten ist. Die untenstehende Tabelle gibt die ersten sechs Nullstellen. Bei $n = 1$ und 2 kann die letzte Dezimale als sicher gelten. Bei $n = 3$ ist sie um eine Einheit, bei $n = 4,5$ um zwei Einheiten unsicher. Für die Nullstellen höherer Nummer gilt die asymptotische Formel:

$$\left. \begin{matrix} x^{(n)} \\ y^{(n)} \end{matrix} \right\} \sim \frac{1}{2} \sqrt{\pi \left(4n - \frac{1}{2}\right)} \mp \frac{1}{2 \sqrt{\pi \left(4n - \frac{1}{2}\right)}} \ln \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{4n - \frac{1}{2}} \right) \pm \dots \quad (1)$$

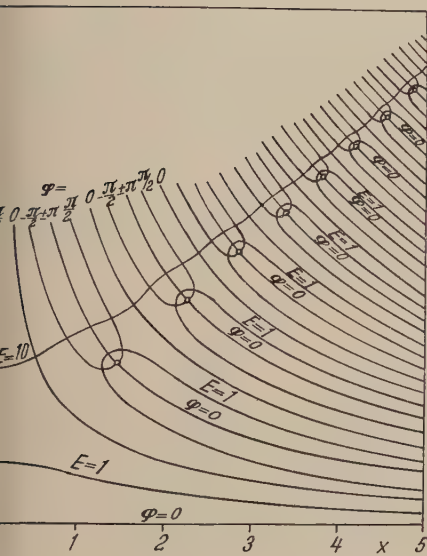


Fig. 1

$\operatorname{erf}(x + i y) = E e^{i \varphi}.$

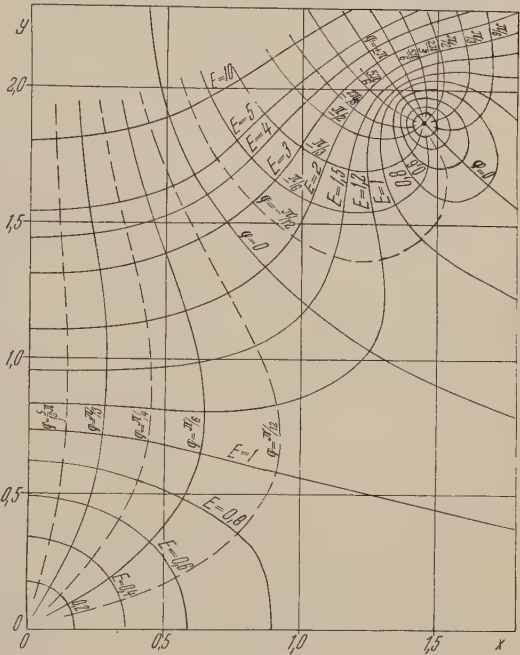


Fig. 2

$\operatorname{erf}(x + i y) = E e^{i \varphi}.$

Nullstellen $\operatorname{erf}(z^{(n)}) = 0$		
n	$\pm x^{(n)}$	$\pm y^{(n)}$
0	0	0
1	1,451	1,881
2	2,244	2,618
3	2,841	3,174
4	3,375	3,640
5	3,805	4,045

Nachstehend soll kurz der zur Konstruktion der Höhenkarte eingeschlagene Weg beschrieben werden, da er vielleicht auch einmal zur Tabellierung nützlich sein kann. Aus der Definition des Fehlerintegrals

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt$$

(2)

läßt sich leicht die Differentialgleichung einer Fallinie $\varphi = \arg [\operatorname{erf}(z)] = \text{const}$ gewinnen:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(2x y + \varphi). \quad (3)$$

Ausgehend von einem bekannten Punkt erhält man durch graphische oder numerische Integration von (3) die ganze Fallinie. Als bekannte Ausgangspunkte können diejenigen auf der Winkelhalbierenden $x = y$ dienen; denn dort ist $\operatorname{erf}(z)$ durch die Fresnelschen Integrale ausdrückbar:

$$\operatorname{erf}(r\sqrt{i}) = (1+i) \left\{ C\left(r\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right) - i S\left(r\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right) \right\}. \quad (4)$$

Längs der so gefundenen Fallinien läßt sich nun durch eine weitere Integration eine Skala des Betrages $E = |\operatorname{erf}(z)|$ anbringen. Es ist

$$E = E_0 \pm \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{z_0}^z e^{y^2 - x^2} |dz|. \quad (5)$$

Das Pluszeichen gilt für die Integration vom Punkt z_0 aus in derjenigen Richtung, die mit der x -Achse den Winkel $2x_0 y_0 + \varphi$ einschließt. Die Auswertung obigen Integrals längs der Linien $\varphi = 0$ gerader Ordnungszahl führt auf die Nullstellen. Diese bilden dann den Ausgangspunkt für weitere Fallinien. Längs der x - und y -Achsen ist der Betrag durch bereits tabellierte Funktionen bekannt, längs der x -Achse durch das gewöhnliche reelle Fehlerintegral, längs der y -Achse durch das von DAWSON¹⁾ tabellierte Integral

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} I m[\operatorname{erf}(i y)] = \int_0^y e^{v^2} dv. \quad (6)$$

Es ist ebenso wie das gewöhnliche Fehlerintegral und die Fresnelschen Integrale in den bekannten Tabellen von JAHNKE und EMDE enthalten.

Man könnte zur Ergänzung auch Höhenlinien $E = \text{const}$ durch direkte Integration finden. Doch führt das weniger rasch zum Ziel als das beschriebene Verfahren, da die Differentialgleichung der Höhenlinien

$$E \left(\frac{y''}{1 + y'^2} - 2y - 2xy' \right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{y^2 - x^2} \sqrt{1 + y'^2} \quad (7)$$

bedeutend weniger bequem ist.

Summary

Two sketches of the altitude chart of the error-function show the general behaviour and approximate values for general complex arguments. A short table of the first zeros is added. The method used for the computation is indicated.

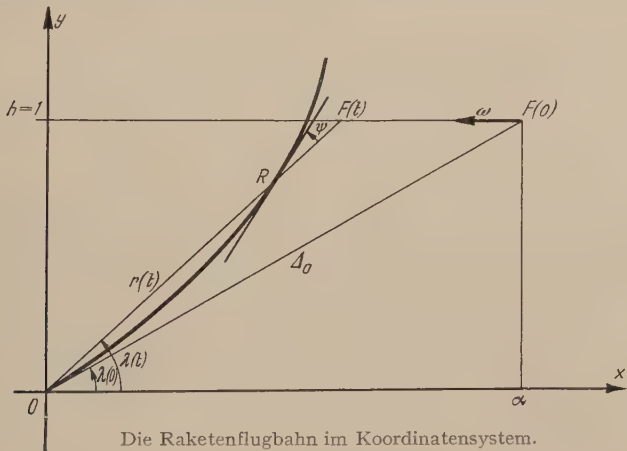
(Eingegangen: 30. 6. 1951)

¹⁾ H. G. DAWSON, Proc. Math. Soc. London 29, 519 (1897/98).

Zur Berechnung der Flugbahnscharen ferngesteuerter Raketen

Von ERNST ROTH-DESMEULES, Luzern

Raketen können in der Weise ferngesteuert werden, indem sie durch ein Steuergerät gezwungen werden, sich längs eines elektromagnetischen Leitstrahles zu bewegen. Folgt dieser Leitstrahl gleichzeitig einem Flugzeug, so wird dadurch erreicht, daß die Rakete mit dem Flugzeug zusammentrifft. Um die Steuerung der Rakete zu ermöglichen, ist eine variable, normal zur Flugbahntangente wirkende Kraft erforderlich. Sie kann entweder durch Steuerflächen, die um den Winkel β_R gegenüber der Raketenachse verdreht sind, oder durch Auslenkung des Antriebsstrahles um den Winkel β_T erzeugt werden. Der Winkel β_R bzw. β_T wird durch das Steuergerät bestimmt.



Die Raketenflugbahn im Koordinatensystem.

Unter der Voraussetzung, daß sich das Flugzeug auf einer horizontalen Geraden bewege, die mit der Raketenabschußstelle in einer Vertikalebene liegt, ist die Flugbahn der Rakete eine ebene, durch den Lagewinkel $\lambda(t)$ und die Entfernung $r(t)$ definierte Kurve. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit darf angenommen werden, das Flugzeug bewege sich in der Höhe $h = 1$ mit der Geschwindigkeit ω und habe zur Zeit $t = 0$ die horizontal gemessene Entfernung α . Der Winkel $\lambda(t)$ ist alsdann durch α und ω (das wir im folgenden als konstant voraussetzen) als Funktion der Zeit gegeben, während $r(t)$ durch die Bewegungsdifferentialgleichungen bestimmt ist.

Um die Bewegungsdifferentialgleichungen zu formulieren, berücksichtigen wir nur die wichtigsten Kräfte, nämlich den Schub T , den Luftwiderstand W , die Steuerkraft $R(\beta_R)$ (Auftrieb der Steuerflächen) und das Gewicht G . Für eine gut stabilisierte Rakete mit idealer Steuerung können wir den Anstellwinkel γ der Raketenachse zur Flugbahntangente vernachlässigen, so daß sich das folgende System von Differentialgleichungen ergibt

$$\left. \begin{aligned} m(t) (\ddot{r} - r \dot{\lambda}^2) &= T \cos(\psi + \beta_T) - R \sin \psi - W \cos \psi - G \sin \lambda, \\ m(t) (r \ddot{\lambda} + 2 \dot{r} \dot{\lambda}) &= T \sin(\psi + \beta_T) + R \cos \psi - W \sin \psi - G \cos \lambda. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Diese Gleichungen sind noch für die beiden obenerwähnten Arten der Lenkung zu spezialisieren. Sie bestimmen die Entfernung $r(t)$ der Rakete und den Winkel $\beta_R(t)$ bzw. $\beta_T(t)$ zu gegebenen Anfangsbedingungen. Mit Hilfe von (1) können wir den nachstehenden Ausdruck für die Krümmung K der Raketenbahn ableiten

$$K = \frac{1}{v^2} \left[\frac{1}{m(t)} [T \sin \beta_T + R(\beta_R)] - g \cos(\lambda + \psi) \right], \quad [v^2 = \dot{r}^2 + (r \dot{\lambda})^2] \quad (2)$$

wo es ohne weiteres möglich ist, auch die Glieder einzuführen, die vom Anstellwinkel γ abhängen. Aus (2) lassen sich eine Reihe von Folgerungen über die Lenkbarkeit ziehen.

Im allgemeinen interessiert aber nicht nur eine einzelne Flugbahn, sondern die zweiparametrische Schar, die von ω und α abhängig ist. Nach einem bekannten Satze von H. POINCARÉ über die Parameterabhängigkeit der Lösungen von Differentialgleichungen – die Voraussetzungen des Satzes sind mit den in der Raketenballistik üblichen Annahmen für die Kräfte erfüllt – lassen sich die Integrale von (1) als Potenzreihen dieser Parameter darstellen. Betrachten wir vorläufig nur ω als Parameter, so führen die Ansätze

$$\left. \begin{aligned} r(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} r_i(t) \omega^i \\ \beta(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i(t) \omega^i \quad (\beta = \beta_R \text{ oder } \beta_T) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

zu den folgenden Gleichungen für die Koeffizienten $r_i(t)$ und $\beta_i(t)$ ($i \geq 1$)

$$\left. \begin{aligned} m \ddot{r}_i + R_1(r_0, \dot{r}_0, \lambda_0) \dot{r}_i + R_0(r_0, \dot{r}_0, \lambda_0) r_i \\ = A_i(r_0, \dots, r_{i-1}; \dot{r}_0, \dots, \dot{r}_{i-1}; \beta_0, \dots, \beta_{i-1}), \\ S_0(r_0, \dot{r}_0, \lambda_0) \beta_i = B_i(r_0, \dots, r_i; \dot{r}_0, \dots, \dot{r}_i; \beta_0, \dots, \beta_{i-1}). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Anfangsbedingungen für $t = 0$: $r_i = \dot{r}_i = 0$.

Für $i = 0$ entstehen die Differentialgleichungen für die geradlinige Bewegung der Rakete. Damit lassen sich sukzessive – für einen gegebenen Abschubwinkel $\lambda(0)$ – die von der Zeit abhängigen Funktionen $r_i(t)$ und $\beta_i(t)$ berechnen.

Da die Funktionen A_i und B_i sehr kompliziert gebaut sind, wird man für die numerische Berechnung der Flugbahnschar den folgenden Weg einschlagen. Aus den Gleichungen (1) berechnen wir eine Anzahl n von Grundbahnen, die zu den Parameterwerten ω_ν ($\nu = 1, 2, \dots, n$) gehören, und die übrigen Bahnen werden vermöge der Ansätze

$$\left. \begin{aligned} r(t) &= \sum_{i=0}^{n-1} r_i(t) \omega^i, \\ \beta(t) &= \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i(t) \omega^i \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

interpoliert. Die Koeffizienten r_i und β_i sind jetzt durch lineare Gleichungssysteme gegeben. Im allgemeinen genügt es, $n = 2$ oder $n = 3$ zu wählen, je nach dem Konvergenzverhalten der Reihen (3). Der Interpolationsfehler ist, wenn R_n das Restglied in (3) bedeutet,

$$\delta r = -R_n \prod_{\nu=1}^n (\omega - \omega_\nu). \quad (6)$$

Eine entsprechende Formel gilt für den Fehler $\delta\beta$. Durch zweckmäßige Wahl der Parameterwerte ω_v der Grundbahnen können wir erreichen, daß der Fehler möglichst günstig ausfällt. Fordern wir etwa, daß die Extremwerte von (6) in einem abgeschlossenen Intervall von ω dem absoluten Betrage nach gleich sein sollen, so sind die ω_v eindeutig bestimmt, und sie lassen sich sogar durch eine einfache geometrische Konstruktion finden. Wir können aber auch verlangen, daß der quadratische Mittelwert von δr minimal sein soll, was zu einer etwas anderen Verteilung der Nullstellen ω_v führt.

Um ebenso α als Parameter einzuführen, ist es zweckmäßig, die Potenzreihen in $1/\Delta_0 = \delta$ aufzustellen. Damit erhalten wir Systeme von Differentialgleichungen, die (4) analog sind, und wir können wie vorhin verfahren bei der Bestimmung der zum Parameter δ gehörenden Flugbahnschar.

Auf diese Weise sind die Lösungen von (1) in der folgenden, für numerische Anwendungen geeigneten Form dargestellt

$$\left. \begin{aligned} r(t) &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} r_{ik}(t) \omega^i \delta^k, \\ \beta(t) &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \beta_{ik}(t) \omega^i \delta^k. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Ein Problem, das nun sofort gelöst werden kann, ist das folgende: Da die zur Bahntangente normale Kraft in ihrer Größe begrenzt ist, vermag die Rakete unter Umständen dem Leitstrahl nicht mehr zu folgen und springt ab. Es entstehen so tote Räume, in denen eine Lenkung der Rakete ausgeschlossen ist. Diese Gebiete lassen sich aus (7) bestimmen und sind durch die Bedingung $|\beta| \geq \beta_{eff}$ charakterisiert, wo β_{eff} durch die Konstruktionsdaten der Rakete und das Maximum des Anstellwinkels γ festgelegt ist.

Für weitere Einzelheiten sei auf die demnächst erscheinende ausführliche Publikation verwiesen.

Summary

The equations of motion of a beam rider rocket are expressed in terms of the most significant forces. The family of trajectories depending on the velocity of the airplane and the angle of launching can be expended in power series of these two parameters with coefficients which are only functions of the time. For numerical applications an appropriate method of interpolation is indicated.

(Eingegangen: 3. 9. 1951.)

A Graphical Solution for the Star-Connected Three-Phase Circuit

By GEORGE N. VLAHAVAS, London

(1) Let OA , OB , OC the three branches of the "Star".

$$\dot{Y}_1 = Y_1 e^{-j\varphi_1}, \quad \dot{Y}_2 = Y_2 e^{-j\varphi_2}, \quad \dot{Y}_3 = Y_3 e^{-j\varphi_3}$$

their respective admittances.

$${}_1\dot{V}_2 = V e^{-j0}, \quad {}_2\dot{V}_3 = V e^{-j(2\pi/3)}, \quad {}_3\dot{V}_1 = V e^{-j(4\pi/3)}$$

the applied voltages between the points AB , BC , CA respectively.

$$\dot{V}_1 = V e^{jx}, \quad \dot{V}_2 = V e^{jy}, \quad \dot{V}_3 = V e^{jz}$$

the voltages between the points AO , BO , CO respectively, which we have to find.

The application of KIRCHHOFF's laws gives

$$\dot{V}_1 = \frac{{}_1\dot{V}_2 \dot{Y}_2 - {}_3\dot{V}_1 \dot{Y}_3}{\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3}.$$

$$\text{Let } \dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3 = Y_T e^{-j\theta}.$$

The value of \dot{V}_1 can be written

$$\frac{V}{Y_T} \{Y_2 e^{j(\theta - \varphi_2)} - Y_3 e^{j[\theta - \varphi_3 - (4\pi/3)]}\}$$

or

$$\begin{aligned} \frac{V}{Y_T} & \left\{ \left[Y_2 \cos(\theta - \varphi_2) - Y_3 \cos\left(\theta - \varphi_3 - \frac{4\pi}{3}\right) \right] \right. \\ & \left. + j \left[Y_2 \sin(\theta - \varphi_2) - Y_3 \sin\left(\theta - \varphi_3 - \frac{4\pi}{3}\right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Hence

$$V_1^2 = \frac{V^2}{Y_T^2} \left[Y_2^2 + Y_3^2 - 2 Y_2 Y_3 \cos\left(\varphi_2 - \varphi_3 + \frac{2\pi}{3}\right) \right].$$

Calling the bracket D_1^2 we have $V_1 = V D_1 / Y_T$. Similarly we find $V_2 = V D_2 / Y_T$, etc.

(2) A graphical solution is therefore suggested as follows. Draw first three vectors representing \dot{Y}_1 , \dot{Y}_2 , \dot{Y}_3 and find their resultant PQ . Construct an equilateral triangle PQS where PQ , SP , QS represent respectively the voltages ${}_1\dot{V}_2$, ${}_2\dot{V}_3$, ${}_3\dot{V}_1$ multiplied by Y_T/V .

Then from an arbitrarily chosen point K , draw the lines KL_1 , KL_2 , KL_3 of lengths Y_1 , Y_2 , Y_3 respectively, with

$$\angle KL_1, \angle KL_2 = \varphi_1 - \varphi_2 + 120^\circ, \quad \angle KL_2, \angle KL_3 = \varphi_2 - \varphi_3 + 120^\circ,$$

$$\angle KL_3, \angle KL_1 = \varphi_3 - \varphi_1 + 120^\circ.$$

Notice

$$(L_2 L_3) = D_1, \quad (L_3 L_1) = D_2, \quad (L_1 L_2) = D_3.$$

Now with centres Q , P , S and respective radii of lengths D_1 , D_2 , D_3 draw circles which cut each other at one point M .

On PQ , from P towards Q , take a length $(PT) = V$ and from T draw a parallel to PM , until it cuts QM at Q_0 .

Finally, from Q_0 draw parallels to QP , QS which cut MP and MS at P_0 and S_0 respectively.

P_0Q_0 , S_0P_0 , Q_0S_0 will represent the applied voltages ${}_1\dot{V}_2$, ${}_2\dot{V}_3$, ${}_3\dot{V}_1$ and $\overline{MQ_0}$, MP_0 , MS_0 the branch voltages \dot{V}_1 , \dot{V}_2 , \dot{V}_3 respectively.

Therefore

$$(MQ_0) = V_1, \quad (MP_0) = V_2, \quad (MS_0) = V_3$$

$$\overline{PQ, MQ} = x, \quad \overline{PQ, MP} = y, \quad \overline{PQ, MS} = z.$$

We shall choose of course two suitable scales: One for Mhos and one for Volts.

(Received: April 23, 1951.)

Varia – Miscellaneous – Divers

IX. Generalversammlung der Internationalen Union für Geodäsie und Geophysik

In Brüssel hat vom 20. August bis 1. September 1951 unter dem Präsidium von Prof. F. A. VENING MEINESZ, Niederlande, die IX. Generalversammlung der Internationalen Union für Geodäsie und Geophysik stattgefunden. Nach der feierlichen Eröffnung des Kongresses in der Académie des Beaux-Arts im Beisein der Königin Elisabeth hat die Union ihre Sitzungen in den Räumen der Freien Universität Brüssel und der Cité universitaire abgehalten. Die Arbeitsgebiete der Union umfassen die Geometrie und Physik des Erdballes und seiner einzelnen Teile. Es ist klar, daß für diese Arbeitsgebiete die internationale Zusammenarbeit nicht nur erwünscht, sondern unerläßlich ist. Die Hauptarbeit der Generalversammlungen der Union gilt daher den Fragen der internationalen Organisation der wissenschaftlichen Forschung in Geodäsie und Geophysik. Die Union ist in folgende sieben internationale Assoziationen unterteilt: Geodäsie, Seismologie, Meteorologie, Erdmagnetismus und Erdelektrizität, Ozeanographie, Vulkanologie und Hydrologie. Diese Assoziationen haben ihre Arbeitssitzungen in Brüssel zum größten Teil gleichzeitig abgehalten, so daß erst die im Druck erscheinenden Kongreßakten einen vollständigen Überblick über die Arbeit der Union und der Assoziationen geben können.

Die Assoziation für Geodäsie behandelt auch die Probleme der internationalen Schwerevermessung. Wie die von G. P. WOOLLARD 1948 ausgeführte Weltreise mit einem Worden-Gravimeter gezeigt hat, ist es heute möglich, mit Hilfe von statischen Gravimetern in relativ kurzer Zeit ein weltweites Netz von Schwerestationen zusammenhängend zu vermessen. Die Assoziation für Geodäsie hat deshalb in Brüssel eine internationale Organisation geschaffen, die die Vervollständigung dieses Netzes fördern und insbesondere auch die zahlreichen von privaten Gesellschaften für Erdölprospektion ausgeführten und nicht publizierten Schwerevermessungen für das Netz nutzbar machen soll. In der Assoziation für Seismologie sind neben organisatorischen Fragen, wie Telegrammkode für Erdbeben, einheitliche Bezeichnung der Phasen in den Seismogrammen, Zusammenarbeit mit der Europäischen Gesellschaft für Seismologie, in rund fünfzig Referaten wissenschaftliche Fragen über Fortpflanzung von Wellen, Erdbebenapparate, Erdbebenintensität, Sprengseismik, Erdbebengeographie und -statistik behandelt worden. Neben den Sitzungen der einzelnen Assoziationen haben auch Verhandlungen von gemischten Kommissionen stattgefunden über Gegenstände, die die Zusammenarbeit verschiedener Assoziationen oder die Zusammenarbeit mit andern Unionen, wie der Astronomischen Union und der Union Radio-Scientifique Internationale,

erfordern. Als solche Gegenstände seien erwähnt: physikalische Zusammenhänge zwischen Sonne und Erde, Physik der hohen Atmosphäre und der Ionosphäre, mikroseismische Bodenunruhe, Erforschung des Meeresgrundes. Besonderem Interesse begegneten die Verhandlungen der gemischten Kommission für die Physik des Erdinnern über den Wärmehaushalt des Erdballes, Kontinente und Ozeane, Erdkern, Mechanik der Erdkruste. Die Seismologische Assoziation hat die Physik des Erdinnern in ihr Arbeitsprogramm aufgenommen. Sie führt demgemäß von nun an die Bezeichnung «Internationale Assoziation für Seismologie und Physik des Erdinnern». Mit der Generalversammlung war eine Ausstellung geophysikalischer Instrumente verbunden.

Exkursionen führten zum Meteorologisch-Seismologischen Observatorium Uccle, zum neuen geophysikalischen Zentrum Dourbes, in belgische Kohlengebiete, ins Hydraulische Observatorium Liège, zum Hafen Antwerpen mit Besuch hydrographischer Schiffe der USA. und Großbritanniens, und nach Gent und Brügge. Die über 600 Teilnehmer des Kongresses fanden dabei überall gastliche Aufnahme. Die Schweiz war mit 17 Delegierten, die mit einer Reihe Referaten und in Komitees aktiven Anteil an den Kongreßarbeiten nahmen, gut vertreten. Besonders freut es uns, unseren Delegationschef, Prof. C. F. BAESCHLIN, zu seiner Wahl zum Präsidenten der Internationalen Assoziation für Geodäsie beglückwünschen zu können. Als Präsident der Union für die nächste Amtsdauer von drei Jahren wurde Prof. S. CHAPMAN, Großbritannien, gewählt und als Tagungs-ort für die nächste Generalversammlung 1954 Rom in Aussicht genommen.

F. GASSMANN

Errata

Über Dämpfung durch Abstrahlung elastischer Wellen und über gedämpfte Schwingungen von Stäben. VON FRITZ GASSMANN (ZAMP 2, Fasc. 5, 336 [1951]).

Die nachstehenden Stellen sind wie folgt zu lesen:

- (12) 4. Zeile: Schwerpunkt von F_0 (statt Schwerpunkt F_0).
- (40) 3. Zeile: $e^{-j(\omega/w)r}$ (statt $s^{-j(\omega/w)r}$).
- (45) 8. Zeile: $\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_v}{\partial r}$ (statt $\frac{1}{j} \cdot \frac{\partial H_v}{\partial r}$).
- (46) 3. Zeile: H_v'' (statt H'').
- (50) 5. Zeile: 9 (statt g ; zweimal).
- (60) 6. Zeile: endlicher (statt unendlicher).
- (68) 1. Zeile: Randbedingung (statt Randbedingungen).
- (85) 9. Zeile: $\frac{a \gamma_3}{c}$ (statt $\frac{a \gamma_3}{c}$).
- (86) 10. Zeile: $\varepsilon_2 = \delta_1 - \delta_3 + (\delta_2 - \delta_0) v^2$ (statt $\varepsilon_2 = \delta_1 - \delta_2 + \dots$).
- (87) 11. Zeile: E (statt F).
- (91) 6. Zeile: v_n (statt v_a).
- (92) 11. Zeile: $\delta_1 - \delta_3$ (statt $\delta_1 - \delta_2$).

Ferner Figur 1, 4 und 6: Träger (statt Spannungsmedium).

 Buchbesprechungen – Book Reviews – Notices bibliographiques

Grundzüge der Elektroakustik. Von F. A. FISCHER (Fachverlag Schiele & Schön, Berlin 1950). 164 S., 102 Abb.; DM 14.—.

Der Verfasser des vorliegenden Buches beabsichtigt, mit seinem Werk allen jenen Physikern, Ingenieuren und Technikern, die sich mit Elektroakustik befassen wollen, die für dieses Gebiet notwendigen Grundkenntnisse zu vermitteln. Der Text ist daher so abgefaßt, daß keine weitere Literatur zu seinem Verständnis notwendig ist. Auch auf dem Gebiet der Akustik sind keine besonderen Kenntnisse vorausgesetzt.

Das erste Kapitel macht den Leser mit den elektrischen und mechanischen Energieträgern und -verbrauchern und mit den zugehörigen mathematischen Gleichungen bekannt. Dabei wird dem Begriff der Widerstandsreziprozität große Aufmerksamkeit gewidmet. Aus dieser Darstellung folgen fast zwangsläufig die beiden elektromechanischen Analogien, und an Hand von Beispielen einfacher Schwingungssysteme wird der große Vorteil dieser Betrachtungsweise demonstriert. Anschließend folgt eine sehr systematische Behandlung der gekoppelten Schwingsysteme.

Das zweite Kapitel befaßt sich mit der Kraftwirkung elektrischer und magnetischer Felder. Außer den klassischen Faraday- und Maxwell-Kräften werden auch der piezoelektrische und der Magnetostriktionseffekt besprochen. In den nächsten vier Kapiteln beschreibt der Autor zuerst die Grundgesetze der elektromechanischen Umwandlungsprinzipien und ihre Anwendung auf die verschiedenen Wandler; dann folgt eine Systematik dieser Apparate, und schließlich werden noch die Differentialgleichungen sowie die elektroakustischen Impedanzen der Wandler besprochen. Das siebente Kapitel beschäftigt sich mit der Abstrahlung des Schalles. Die restlichen Kapitel behandeln noch einige spezielle Probleme, wie den Wirkungsgrad und die Empfindlichkeit der Wandler usw.

Das vorliegende Werk zeichnet sich durch große Klarheit und Einfachheit der Gedankengänge aus. Es handelt sich hier um eine Einführung in die theoretischen Grundlagen der Elektroakustik, die die verschiedenen Probleme auf interessante Art und Weise darstellt. Das Buch kann besonders für Studenten bestens empfohlen werden. *A. Lauber.*

Ferromagnetism. By R. M. BOZORTH. The Bell Telephone Laboratories Series (D. Van Nostrand Company, Inc., New York 1951). 968 pp., 825 figs.; \$17.50.

Bis heute fehlte in der wissenschaftlichen Literatur ein umfassendes Buch des Gesamtgebietes des Ferromagnetismus. Es entspricht daher einem direkten Bedürfnis und kann nicht hoch genug eingeschätzt werden, daß der Verfasser sich dieser großen Aufgabe unterzogen und in einem fast tausendseitigen Werk die Erscheinungswelt des Ferromagnetismus zur Darstellung gebracht hat. Dabei kommen folgerichtig nicht nur die physikalischen Überlegungen und Verfahren zur Sprache, sondern auch, ihrer Bedeutung entsprechend, jene der Metallurgie, Chemie und Elektrotechnik.

Das Werk zerfällt in vier Hauptabschnitte:

In einem ersten, einführenden Teil werden in zwei Kapiteln die ferromagnetischen Begriffe und allgemeinen Erscheinungen erläutert und die Herstellung und Fabrikation magnetischer Werkstoffe beschrieben.

Sodann folgt der 375 Seiten starke, in sieben Kapitel aufgeteilte zweite Hauptabschnitt, in welchem die ferromagnetischen Stoffe aufgezählt, ihre Struktur und physikalischen Eigenschaften erörtert und eingehend ihr magnetisches Verhalten geschildert werden. Daß darin alle bis heute bekannten modernen Legierungen mit hoher magnetischer Permeabilität, aber auch die bis jetzt entwickelten hochwertigen Dauermagnetstähle mit eingeschlossen sind, ist hier fast selbstverständlich.

Der nächste, 400 Seiten umfassende dritte Hauptabschnitt behandelt die verschiedenen theoretischen Deutungen und Erklärungsversuche der ferromagnetischen Erscheinungen. Zur Charakterisierung dieses theoretischen Teiles des Werkes ist es am einfachsten, die Titel der neun Kapitel, welche diesen Hauptabschnitt bilden, aufzuführen; sie heißen: Magnetische Theorie; Magnetisierungskurve und die Theorie der ferromagnetischen Bezirke; Magnetische Eigenschaften der Kristalle; Elastische Spannungen und Magnetostriktion; Temperatur und der Curie-Punkt; Energie, spezifische Wärme und magnetokalorischer Effekt; Magnetismus und elektrische Eigenschaften; Änderung der Magnetisierung mit der Zeit; Spezielle Probleme der Bezirkstheorie. In den Erörterungen dieses Abschnittes bildet die Schilderung der ferromagnetischen Bezirke den Kernpunkt der theoretischen Deutungsversuche. Sie ist mit besonderer Sorgfalt geschrieben, wie dies vom Verfasser, der selber auf diesem Gebiet der Forschung maßgebend beigetragen hat, nicht anders zu erwarten war.

Der letzte, vierte Hauptabschnitt berichtet noch in einem einzigen Kapitel über die magnetischen Meßverfahren, worauf im Anhang noch einige wertvolle Tabellen über die Eigenschaften magnetischer Elemente und Werkstoffe folgen. Den Schluß des ganzen Werkes bildet ein fast 100 Seiten starkes Verzeichnis der gesamten einschlägigen Literatur.

Das Buch ist klar und deutlich geschrieben, verzichtet auch in den theoretischen Abschnitten auf formelmäßige Ableitungen und beschränkt sich ganz auf eine rein beschreibende Darstellungsweise mit reichlichen Illustrationen. So gewinnt das Buch erheblich an praktischem Wert. Nur ein erfahrener Experimentalforscher, der auch mit den theoretischen Überlegungen und Rechenverfahren wohl vertraut ist, kann der hohen Zielsetzung eines solchen Werkes gerecht werden. Es ist denn auch dem Verfasser wirklich gelungen, ein vorzügliches Standardwerk zu schaffen, das sowohl dem Forschungsingenieur, dem es an der Erschließung neuer Kenntnisse und an der Entwicklung neuer, ferromagnetischer Werkstoffe gelegen ist, als auch dem Praktiker, der die magnetischen Eigenschaften der Werkstoffe für die Konstruktion seiner Maschinen und Geräte kennen muß, große Dienste leisten wird. Das Werk wird daher in Zukunft zum unumgänglichen Rüstzeug aller Forschungslaboratorien und Konstruktionswerkstätten, welche mit dem Gebiete des Ferromagnetismus in Beziehung stehen, gehören.

R. Sängner

Statistische Methoden für Naturwissenschaftler, Mediziner und Ingenieure. Von A. LINDER (Verlag Birkhäuser, Basel 1951). Zweite, erweiterte Auflage, 238 S., 43 Abb.; sFr. 31.20.

Die mathematische Statistik, wie wir sie noch vor wenigen Jahrzehnten kennen, beschränkte sich im wesentlichen auf die Lehre von der Beschreibung statistischer Gesamtheiten durch geeignete Maßzahlen. Unter der Führung namentlich englischer und amerikanischer Gelehrter hat dann eine ungeahnte und noch keineswegs abgeschlossene Entwicklung eingesetzt, welche die mathematische Statistik zu einem wichtigen Hilfsmittel der modernen Naturwissenschaft und

Technik vorrücken ließ. Bis zum Erscheinen der ersten Auflage des Buches von LINDER im Jahre 1945 war man zur Einarbeitung in die neuen Lehren der mathematischen Statistik fast ausschließlich auf englisch geschriebene Literatur angewiesen, so daß sich zum Kampf mit dem Stoff noch jener mit der Sprache gesellte. Daß das Werk von LINDER hier eine empfindliche Lücke ausfüllte, erhellt aus dem Umstand, daß schon vor Ablauf von sechs Jahren eine zweite Auflage nötig wurde. Dem Aufbau nach ist sich das Buch gleich geblieben, doch sind wichtige Ergänzungen eingefügt, so daß der Umfang gegenüber der ersten Auflage um nahezu hundert Seiten angewachsen ist.

Die Disposition des Buches ist äußerst glücklich. Wie LINDER im Vorwort selbst erklärt, will er einerseits den Praktiker in die Lage versetzen, die gebräuchlichsten Methoden der mathematischen Statistik anwenden zu können, andererseits aber sollen auch die mathematischen Grundlagen dargestellt werden. Gerade aus letzterem Grunde gewinnt das Lindersche Buch im Vergleich mit zahlreichen englischen und amerikanischen Büchern, welche nur die Anwendungen der Verfahren, gewissermaßen rezeptartig, mitteilen, deren Begründung aber im dunkeln lassen.

Didaktisch geschickt ist das Werk in drei Hauptteile gegliedert. In einem ersten Hauptabschnitt wird die zweckmäßige Berechnung statistischer Maßzahlen (Durchschnitt, Streuung, Regression, Korrelation) dargestellt, wobei über den Inhalt der ersten Auflage hinausgehend außer der einfachen Regression auch mehrfache lineare Regression, Teilregression und nichtlineare Regression behandelt werden. Über das Trennverfahren von FISHER und den verallgemeinerten Abstand von MAHALANOBIS sind besondere Abschnitte eingefügt. Im zweiten Hauptteil wird die Prüfung der vorgängig erläuterten Maßzahlen auf Grund von Standardverteilungen beschrieben. Ein eigenes Kapitel ist der wichtigen Streuungszerlegung gewidmet. Sehr instruktiv ist die Durchrechnung der zahlreichen glücklich gewählten Beispiele. Der dritte Hauptteil schließlich bringt die mathematischen Grundlagen der statistischen Prüfverfahren und ihrer Anwendungen. Nur dieser Teil des Buches setzt Beherrschung höherer Mathematik voraus, während zum Verständnis der vorangehenden Ausführungen Kenntnisse in elementarer Algebra ausreichen. Es kann kein Zweifel darüber bestehen, daß das vorzügliche Buch von LINDER auch weiterhin in Lehre und Praxis weite Verbreitung finden und beste Dienste leisten wird.

H. Jecklin

Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit. Von R. VON MISES (Springer-Verlag, Wien 1951). 278 S.; sFr. 18.50.

Das Studium dieses in dritter Auflage erscheinenden, wesentlich umgearbeiteten Buches hat auf den Unterzeichneten einen tiefen Eindruck gemacht, und zwar aus folgenden Gründen:

1. Es dürfte wenige Bücher geben, in denen in so musterhafter und klarer Weise die Hauptresultate einer schwierigen mathematischen Theorie beinahe allgemeinverständlich, das heißt ohne Formeln und insbesondere ohne Analysis, dargestellt werden.

2. Im Jahre 1919 hat der Verfasser seine berühmten Vorschläge betreffend die Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung mittels den Begriffen eines Kollektivs, des Grenzwertes der relativen Häufigkeit und der Regellosigkeit einer stochastischen Folge publiziert. Seither sind zahlreiche Bücher und Abhandlungen erschienen, die sich mit dieser Begründung auseinandersetzen, zum Teil in zustimmendem und zum Teil in ablehnendem Sinne. Der Verfasser setzt sich sehr scharfsinnig und umfassend mit seinen Kritikern auseinander. Nach meinem

Dafürhalten ist es ihm zumindest gelungen, zu beweisen, daß bis heute keine bessere Theorie an die Stelle der seinigen gesetzt werden konnte. Er gibt jedoch zu, daß auch seine Theorie in verschiedener Hinsicht vertieft und ausgebaut werden sollte, zum Beispiel im Sinne der Untersuchungen von *TORNIER* und *DOOB*.

3. Die Beschreibung der Grenzwertsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung insbesondere der Gesetze der großen Zahlen und ihrer Bedeutung, ist hervorragend. Bei dieser Gelegenheit werden gewisse Mißverständnisse von Statistikern, die sich zum Beispiel durch Einführung der Begriffe «likelihood» und «small sample theory» vor allem in englisch-amerikanischen Publikationen ergaben, festgestellt und aufgeklärt.

4. Die Schilderung der Bedeutung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der modernen Statistik und insbesondere in der modernen theoretischen Physik, zum Beispiel bei der Brownschen Bewegung, in der Gastheorie und der Quantenstatistik muß jeden Mathematiker, Physiker und in der Forschung tätigen Ingenieur interessieren.

Schon die früheren Auflagen dieses Buches wurden in andere Sprachen übersetzt. Es besteht für mich kein Zweifel darüber, daß die neue Auflage bei allen denjenigen, die sich für die wissenschaftliche Entwicklung der modernen Naturwissenschaften im weitesten Sinne des Wortes interessieren, ihre gebührende Beachtung finden wird. Es handelt sich um ein Meisterwerk im wahrsten Sinne.

W. Saxer

Technische Thermodynamik, Einführung in Grundlagen und Anwendung. Von A. PISCHINGER (Springer-Verlag, Wien 1951). VIII und 231 S., 179 Abb., sFr. 20 20.

Das vorliegende Buch stellt eine erweiterte Wiedergabe der Vorlesung des Verfassers über technische Thermodynamik an der Technischen Hochschule Graz dar. Es soll dem angehenden Ingenieur die notwendigsten Grundbegriffe und deren Anwendung beibringen. Der Zusammenhang zwischen den mikro- und makroskopischen Vorgängen wird dementsprechend nur kurz besprochen.

Im ersten Teil sind die Grundlagen an Hand der bekannten Formeln und der zugehörigen graphischen Darstellungen behandelt. Das Hauptgewicht wird auf die formellen Ableitungen gelegt. Die physikalischen Hintergründe der Temperaturabhängigkeit der spezifischen Wärmen werden kurz gestreift. Unter den graphischen Darstellungen findet man neben den üblichen (p, v) -, (T, s) -, (i, s) - noch die (i, t) -, (i, p) -, (p, t) - und (v, t) -Diagramme, das (i, x) -Diagramm wird nur nebenbei erwähnt.

Der zweite Teil ist der Anwendung der Grundlagen auf technische Prozesse und Maschinen gewidmet. Es folgen aufeinander:

Die Verbrennung – bei der unter anderm der Einfluß der Dissoziation genannt, dagegen das für einen Ingenieur nicht uninteressante Ostwald-Dreieck weggelassen wird;

Strömung von Gasen in Kanälen – wobei die stationären und die nicht-stationären Vorgänge dargestellt werden;

Wärmemaschinen – mit Kompressoren, Verbrennungskraftmaschinen, Verbrennungsturbinen, Dampfkraftanlagen, Kältemaschinen und Wärmepumpen. Hier werden die Schemata der Maschinen angegeben, die Prozesse an Hand der (T, s) - bzw. (i, s) -Diagramme besprochen und die Karnotisierungsmaßnahmen angeführt.

Es ist schade, daß die Probleme der Wärmeübertragung vom Verfasser nur in Form eines kurzen Überblickes im Anhang gestreift werden. Eine willkommene Beilage bilden die recht umfangreichen Tabellen und Tafeln. Das Buch zeichnet sich durch eine klare, übersichtliche Anordnung aus, die das Nachschlagen erleichtert. Es kann für die Einführung sehr empfohlen werden; nach seinem Studium dürfte das Vordringen in die schwierigeren Kapitel der technischen Thermodynamik wesentlich erleichtert sein.

Z. Plaskowski

The Oxide-Coated Cathode, Vol. I, *Manufacture*. By G. HERMANN and S. WAGENER (Chapman & Hall, London 1951). 148 pp., 78 figs.; £-/21/-.

Im Jahre 1944 haben HERMANN und WAGENER ihr Standardwerk über die Oxydkathode veröffentlicht. Es zerfällt in zwei Teile: Theorie und physikalische Grundlagen der Oxydkathode; Herstellungsfragen. S. WAGENER hat nun dieses Werk auch in die englische Sprache übersetzt und im ersten Band Herstellungsfragen und -probleme behandelt (Teil II der deutschen Ausgabe).

Im ersten Kapitel wird eine Übersicht über die Entwicklung der Technik der Oxydkathode und über die Anschauung ihrer Wirkungsweise gegeben. Es folgt eine Festlegung der charakteristischen Größen und ein Überblick über die Anwendungsgebiete. Im nächsten Kapitel wird die Herstellung der Kathode bis zu ihrem Einbau in die Röhre behandelt. Als erstes wird dabei das Kernmetall diskutiert und die daran gestellten Anforderungen beleuchtet. Es folgt die Behandlung der Herstellung der Kathodenpaste und deren Auftragungstechnik auf den Träger. Im dritten Kapitel folgt eine Analyse des Abbrenn- und Formierungsprozesses in der Röhre während des Pumpprozesses.

Das vierte Kapitel bringt die Diskussion der technischen Eigenschaften der Oxydkathode, das heißt der charakteristischen Daten sowie deren Messung: Emissionswerte und ihre Messung, Vergleich verschiedener Kathodentypen. Es folgt die Behandlung unerwünschter Eigenschaften der Kathoden, wie Verdampfung der Oxydschicht, geringe Haftfestigkeit der Schicht auf dem Träger, Vergiftungsanfälligkeit, Beeinflussungen der Lebensdauer. Im letzten Kapitel werden schließlich spezielle Kathoden einer Betrachtung unterzogen: Oxydkathoden nach dem Aufdampfverfahren, kernaktivierte Kathoden, Vorratskathoden.

Es handelt sich beim vorliegenden Band im wesentlichen um eine Übersetzung des vorzüglichen deutschen Werkes. Gegenüber der deutschen Ausgabe hat die neue englische eine Erweiterung um die Kathodentypen der Magnetronröhren erfahren. Hervorzuheben ist die sorgfältige Ausstattung des Buches sowie die reichhaltige Literaturzusammenstellung, welche die Originalarbeiten bis zum Jahre 1950 erfaßt.

N. Schaetti

Das Trockengleichrichter-Vielfachmeßgerät. Von TH. WALCHER (Springer-Verlag, Wien 1950). 144 S., 97 Abb.; sFr. 13.80.

In der gesamten Wechselstrommeßtechnik findet heute das Trockengleichrichter-Vielfachmeßgerät eine weitverbreitete Verwendung. Dank der vorzüglichen Eigenschaften des Drehspulmeßwerkes hinsichtlich Empfindlichkeit, Genauigkeit und Eigenverbrauch können in Verbindung mit Trockengleichrichtern Meßgeräte für Wechselstrom bis zu sehr hohen Frequenzen erhalten werden, welche mit eigentlichen Wechselstrommeßwerken nicht zu verwirklichen wären. Andererseits ist zu bemerken, daß ein Gleichrichtergerät grundsätzlich keine Effektivwerte messen kann und daß diese aus dem vom Instrument angezeigten Strom- oder Spannungsmittelwerte und dem Formfaktor der Wechselstromkurve zu errechnen wären. Ferner ist zu erwähnen, daß ein Trockengleichrichter weder

eine ideale Kennlinie besitzt noch in bezug auf Konstanz des Widerstandes und Abhängigkeit von Frequenz und Temperatur befriedigende Eigenschaften aufweist. Es ist daher sehr zu begrüßen, wenn in dem vorliegenden Werke von berufener Seite die Trockengleichrichter-Meßgeräte eine ausführliche Behandlung erfahren und gezeigt wird, in welchem Maße die moderne Technik die vorerwähnten Schwierigkeiten zu überwinden in der Lage ist.

Nachdem Aufbau und Wirkungsweise des Gleichrichters erläutert worden sind, behandelt der Verfasser im ersten Teile die verschiedenen Theorien zur Erklärung der Gleichrichterwirkung. Hierauf werden die Erkenntnisse über die charakteristischen Eigenschaften zusammengestellt und ihre Abhängigkeit von den Einflußgrößen beschrieben. In einem besonderen Abschnitt wird in Zusammenhang mit der Meßschaltung und der Belastung die Oberwellenabhängigkeit und ihr Einfluß auf die Meßgenauigkeit eingehend untersucht. Über den ersten Teil des Buches darf ausgesagt werden, daß er auf alle auftauchenden Fragen meßtechnischer Art beim Arbeiten mit Gleichrichtermeßgeräten erschöpfend Auskunft gibt.

Im zweiten Teile wird die Anwendung der im ersten gewonnenen Erkenntnisse an zahlreichen praktischen Beispielen gezeigt. Dabei springt die ungemein vielseitige Anwendungsmöglichkeit der Vielfachmeßgeräte sofort in die Augen. Wenn der Verfasser diese Anwendungsbeispiele nur unter Verwendung des von der Firma NORMA herausgebrachten Normameters beschreibt, so dürfte dieser Umstand den Wert des Buches kaum beeinträchtigen, da jeder einigermaßen geübte Meßtechniker in der Lage sein dürfte, die jeweiligen Meßschaltungen bei Verwendung von Geräten anderer Herkunft sinngemäß auf diese zu übertragen.

Zusammenfassend kann bestätigt werden, daß mit der Herausgabe des vorliegenden Buches der von seinem Verfasser angestrebte Zweck erreicht wird: dem in der Praxis stehenden Ingenieur und Techniker ein Hand- und Nachschlagebuch zu bieten, das ihm bei der Lösung der oft recht schwierigen Aufgaben der elektrischen Meßtechnik bei Anwendung von Gleichrichter-Vielfachmeßgeräten Hilfe und Anregung gibt.

E. Offermann

New Atoms, Progress and Memories. By O. HAHN (Elsevier Publishing Company Inc., Amsterdam 1950). 183 pp.; \$1.75.

In vier Kapiteln vereinigt dieses Buch verschiedene Veröffentlichungen, Vorträge und Vorlesungen von OTTO HAHN aus dem Gebiete der Radioaktivität.

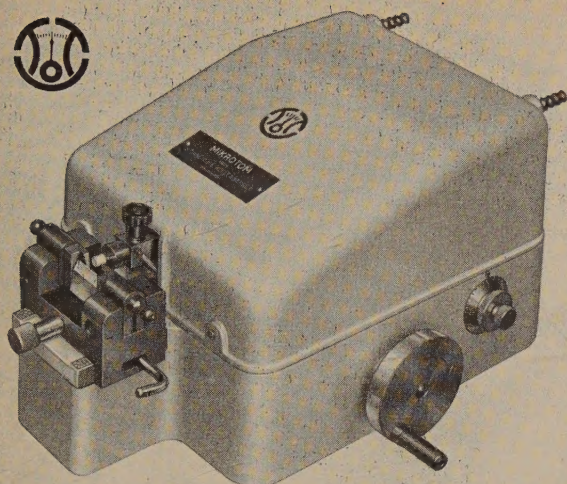
Das erste Kapitel enthält den Vortrag des Autors, den er anlässlich der Entgegennahme des Nobelpreises für Chemie im Jahre 1944 gehalten hat. Es ist die Beschreibung der analytisch-chemischen Experimente, die zur Entdeckung der fundamentalen Uranspaltung führten. Diese zeigen unter anderem die ungeheuren Schwierigkeiten der Identifikation der neuen radioaktiven Zerfallsprodukte.

Die beiden nächsten Kapitel behandeln die Zerfallsreihe des Urans und die neuen künstlichen Transurane.

Das letzte Kapitel schließlich bringt Erinnerungen von HAHN aus seiner Pionierzeit, während welcher er außerordentlich wichtige Beiträge zur Klärung der Erscheinungen der Radioaktivität brachte, wie die Entdeckungen des Radiums und des Mesothorium.

Der kleine Band in seiner sehr sorgfältigen Ausführung bildet eine interessante und lesenswerte Darstellung eines der aktuellsten Gebiete der modernen Physik.

N. Schaetti



DAS NEUE MIKROTOM FÜR DIE ELEKTRONEN- MIKROSKOPIE

erzeugt erstmals regelmäßige
Schnittbänder von $0,05-1 \mu$
und ist unempfindlich gegen
Erschütterungen

TRÜB, TÄUBER & CO. AG., ZÜRICH

Fabrik elektrischer Meßinstrumente und wissenschaftlicher Apparate

Neuerscheinung!

DR. ING. KARL KUHLMANN

Em. Professor an der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich

Theoretische Elektrotechnik

BAND III

Grundzüge der Theorie elektrischer Maschinen

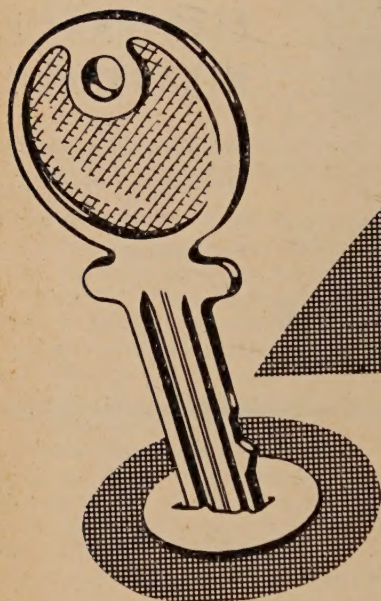
546 Seiten mit 328 Abbildungen · In Ganzleinen Fr. 74.90

Hauptabschnitte: Erzeugung magnetischer Felder – Induktivitätsberechnung von Maschinenwicklungen – Induzierte elektromotorische Kräfte – Magnetische Energie und Drehmoment elektrischer Maschinen – Verluste in elektrischen Maschinen durch Strom- und Eisenwärme – Das Rechnen mit symmetrischen Komponenten.

Band II erschien 1947 · Band I befindet sich in Vorbereitung

Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung

VERLAG BIRKHÄUSER BASEL



DAS FRAGEZEICHEN IST DER SCHLÜSSEL ALLER WISSENSCHAFT

Der wissenschaftliche Mensch ist ewig auf der Suche. In Gedanken, Wünschen und Träumen möchte er fortwährend ergründen, verbessern, umwandeln, was eben erst mühsam erworben wurde. Gewonnene Erkenntnis dient ihm nur dazu, durch neue Fragestellung zu neuem Wissen zu gelangen.

Die **PHYSIKALISCHEN BLÄTTER** berichten über das weite Gebiet der Physik und die wichtigen Randgebiete dieser Wissenschaft, ohne in die vielfach übliche Popularisierung zu verfallen. Oberstes Gesetz bleibt wissenschaftliche Exaktheit. Führende Fachwissenschaftler bedienen sich einer Darstellungsweise, die auch schwierige Einzelprobleme verständlich macht.

Eine sinnvolle Unterteilung ordnet die Vielfalt des wissenschaftlichen Stoffes. Neben drei bis vier Hauptaufätzen in jedem Heft unterrichtet diese Monatschrift ihre Leser in kürzeren Abhandlungen und Notizen über wichtige Fragestellungen, Ergebnisse und Ereignisse aus dem gesamten Gebiet.

Bezugspreis: monatlich DM 2.25, vierteljährlich DM 6.75.
Zu beziehen durch jede Buchhandlung. Probeheft kostenlos vom

PHYSIK
PHYSIK VERLAG MOSBACH/BADEN V SCHEFFELSTRASSE 1 TELEFON 396

Deutschland

clichés
in jeder Technik



SCHWITTER
A-G

BASEL / ZÜRICH

